ENTREVISTA

A CURIOSIDADE DO MATEMÁTICO: CONHECER ALGO ATÉ SUAS ÚLTIMAS CONSEQUÊNCIAS

As opiniões de Gerd Faltings

Quando, em 1983, o matemático alemão Gerd Faltings, de 28 anos, conseguiu provar a conjectura de Mordell, as manchetes dos jornais de todo o mundo comentaram o evento. Foi uma das raras ocasiões em que uma descoberta matemática foi notícia até para os não matemáticos. A conjectura demonstrada por Faltings vinha desafiando os pesquisadores da teoria dos números há mais de 60 anos, desde a sua formulação pelo matemático inglês Joel Louis Mordell. A prova da conjectura de Mordell implicou na demonstração quase completa da famosa conjectura de Fermat, também chamada "o último teorema de Fermat", um dos problemas mais intrigantes na história da Matemática, desde o Século XVII. Em reconhecimento ao seu trabalho, Faltings recebeu o prêmio Craaford, uma altíssima honraria para um matemático.

A comunidade matemática brasileira não esteve alheia a tão importante evento. Durante o 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado em Poços de Caldas, em julho de 1983, o Professor Paulo Ribenboim, conhecido especialista em teoria dos números, proferiu uma fascinante palestra sobre a história do último teorema de Fermat. Posteriormente, o Noticiário da S.B.M. de Abril de 1984 (Ano XV - Número 1) publicou um belíssimo artigo intitulado "Início da História do Último Teorema de Fermat" de autoria do próprio Professor Paulo Ribenboim. No número seguinte do mesmo Noticiário (Outubro de 1984) foi publicado um artigo do Professor Israel Vainsencher, em que, com surpreendente habilidade, a sutil filigrana de métodos e teoremas que conduziram à prova de Faltings é apresentada em forma compreensível para o leitor não especializado.

O que nos interessa aqui é um terceiro aspecto, ainda ligado ao trabalho de Faltings. Após a visão histórica que interliga seus resultados ao último teorema de Fermat e após a visão técnica da altíssima sofisticação de seus métodos, surge naturalmente uma certa curiosidade em tôrno da personalidade de Gerd Faltings. Perguntamo-nos: "o que se passa na cabeça de um matemático quando faz uma des

Uma série de importantes desenvolvimentos em matemática estão ligados à equação

$$x^n + y^n = z^n. \qquad (*)$$

Um tablete de pedra de mais de 3.800 anos prova que os babilônios faziam listas de números inteiros p, q, r tais que

$$p^2 + q^2 = r^2. \qquad (**)$$

Atribuimos à escola pitagórica (sexto século a.C.) o teorema que estabelece que a soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo é igual ao quadrado de sua hipotenusa. As triplas de inteiros que satisfazem (**) chamam-se, ainda hoje, triplas pitagóricas.

Por volta de 250 d.C. Diofanto de Alexandria estudou propriedades de equações com coeficientes inteiros e soluções inteiras. Ele já conhecia a caracterização das triplas pitagóricas que aparece nos Elementos de Euclides (para uma discussão de tal fórmula consultar "Encontro com a Matemática" de L. Gårding, Editora UnB). Seus trabalhos foram reunidos na obra "Arithmetica" que, mais de um milênio depois, influenciaria e motivaria a pesquisa do francês Pierre de Fermat (1601-1665). Foi à margem de uma página da "Arithmetica", que Fermat anotou:

> *"É impossível separar um cubo em dois cubos, um biquadrado em dois biquadrados, ou, em geral, qualquer potência superior à segunda em potências de mesmo grau. Eu descobri uma prova realmente notável que esta margem é muito estreita para conter".*

Esta afirmativa em linguagem moderna significa que a equação (*) não tem soluções inteiras para $n > 2$.

Fermat não supriu demonstração alguma deste enunciado, que passou a ser chamado "o último teorema de Fermat".

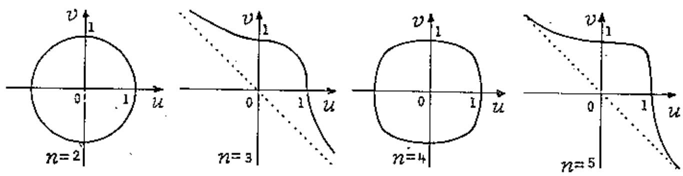
coberta tão revolucionária?" Os mais curiosos dentre nós podem até especular sobre as qualidades que caracterizam um grande matemático. "Como trabalha Gerd Faltings?. Os princípios matemáticos têm caráter universal, pre-existindo às nossas descobertas? Como se deve encarar uma proposição matemática hoje?" Estas e muitas outras perguntas foram formuladas por Uli Deker ao Dr. Gerd Faltings numa entrevista publicada pela revista alemã "Bild der Wissenschaft" em um fascículo especial de outubro de 1983. Agradecemos ao editor da revista pela permissão que nos concedeu para traduzir e publicar a entrevista que reproduzimos a seguir. Agradecemos também ao Professor Ulf Gregor Baranov, do Departamento de Letras da Universidade de Brasília, pela sua tradução.

(ex) *Conjectura de Mordell. Seja C uma curva algébrica de gênero g definida sobre um corpo K, extensão finita dos racionais. Se $g \geq 2$ então o conjunto $C(K)$ dos pontos de C a coordenadas em K é finito.*

Uma definição de gênero de uma curva requer a explicação de outros conceitos relativamente sofisticados. Essencialmente o gênero está determinado pelo maior expoente na equação que descreve a curva.

A equação $x^n + y^n = z^n$ pode ser reescrita na forma $u^n + v^n = 1$, onde $u = \frac{x}{z}$, $v = \frac{y}{z}$. As curvas descritas pelas equações $u^n + v^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, também chamadas "curvas de Fermat" são de gênero $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

As curvas de Fermat $u^n + v^n = 1$



O resultado de Faltings implica que para $n > 2$ as curvas de Fermat têm um número finito de pontos com coordenadas racionais. Assim a equação $x^n + y^n = z^n$ tem no máximo um número finito de soluções inteiras.

Pergunta: Há mais de 60 anos os matemáticos vêm se esforçando para resolver a conjectura pelo matemático inglês *Joel Louis Mordell*, que você, agora, conseguiu demonstrar. Você tinha de fato essa intenção, quando começou a ocupar-se com esse problema?

Faltings: Sim, era o meu objetivo, mas eu estava convencido de que as chances seriam muito reduzidas.

Pergunta: O que é que se passa na cabeça de um matemático: você costuma ter uma visão intuitiva das estruturas com que está lidando, de maneira a intuir as relações, para em seguida passar a prová-las? Ou você trabalha com modelos concretos, específicos, em que você constata propriedades, para transferí-las, em seguida ao caso geral, abstrato?

Faltings: Eu diria que há uma composição de ambas as coisas. A gente dispõe da experiência acêrca do funcionamento de certas con clusões, sob condições determinadas. Por isso, primeiramente a gente reflete sobre como poderia ser o caminho a ser percorrido. Costumo iniciar o raciocínio em grandes linhas: se eu chegar a tal resultado, poderia mostrar como conseqüência mais isto e mais aquilo. Mais tarde, torna-se necessário incluir os detalhes e ver se efetivamente é possível seguir por esse caminho. É óbvio que freqüentemente deparamos com impasses; então é preciso tentar de novo outro caminho a ser percorrido.

Pergunta: Poderíamos fazer uma comparação com o plano de uma alpinista que examina primeiramente a montanha que deseja escalar, planeja uma rota e, ao tentá-la, se vê obrigado a modificá-la repetidas vezes?

Faltings: O problema do matemático é que ele nunca enxerga seu objetivo com tanta nitidez como um alpinista vê o pico da montanha que pretende escalar. No nosso caso, pretende-se demonstrar algo, do que, inicialmente, nem sabemos se está correto ou não.

Pergunta: De qualquer maneira, você também teria tido sucesso se tivesse provado que a conjectura de *Mordell* estava errada ...

Faltings: Sem dúvida, mas há sempre uma certa margem de insegurança. Já houve muitas conjecturas que se tentou provar antes de chegar à conclusão de que estavam erradas. Por isso, o modo de trabalhar do matemático se assemelha mais à situação de um alpinista que nem enxerga o pico da montanha, apenas o imagina lá em cima.

Pergunta: A sua especialidade é a Geometria Algébrica. Portanto, você não trabalha com números, mas essencialmente com estruturas.

Faltings: Em princípio trata-se de Geometria, onde trabalhamos com curvas dadas por equações polinomiais. Trata-se de equações em que aparecem apenas multiplicações e adições, e não funções de ângulos, como seno e co-seno. É claro que há uma abstração, pois as equações, de certa forma, são mais importantes do que as curvas. Em seguida, examinam-se as estruturas ligadas a essas equações e assim, com métodos algébricos, chegamos a fazer novamente afirmações de natureza geométrica. Pessoalmente, sinto-me mais inclinado a essa perspectiva algébrica. Já na escola aprendemos a trabalhar com esse princípio na Geometria Analítica. Representamos os pontos da curva por coordenadas; por exemplo, um círculo é representado pela equação $x^2 + y^2 = r^2$ para as coordenadas x, y de seus pontos. Com es tas podemos fazer cálculos, determinando analiticamente as propriedades da curva. Esse modo de provar uma propriedade nem sempre é o mais elegante, mas é sem dúvida muito seguro e sistemático.

Pergunta: Havia algum artifício decisivo em sua demonstração da conjectura de Mordell?

Faltings: Não, propriamente. Devo lembrar que uma parte decisiva da prova, em princípio, já existia; apenas a apliquei adequadamente. Não encontrei nenhum artifício absolutamente inovador.

Pergunta: De qualquer modo, foi você quem encontrou a solução?

Faltings: É verdade, mas foi mais por acaso, devido a conhecimentos prévios do assunto. É claro que havia também alguns artifícios que tive de encontrar ao longo da demonstração, mas em grandes linhas eu imaginava como deveria ser o caminho a ser seguido, restando apenas superar as dificuldades nos detalhes.

Pergunta: Ao longo de sua demonstração você se ocupou com uma série de estruturas abstratas. De um modo geral constatamos, hoje, que a Matemática moderna se vem utilizando de estruturas cada vez mais abstratas. Elas constituem um fim em si da Matemática e tem função instrumental, ou apresentam também um interesse fora de seu âmbito?

Faltings: De início, essas estruturas são desenvolvidas só para a Matemática. Mas acontece seguidamente que outras pessoas encontram aplicações práticas. Por exemplo, há pouco tempo, na teoria da codificação de informações, surgiram também as curvas algébricas. Assim, os resultados da Matemática podem oferecer aplicações. Mas nós sempre partimos de um problema matemático, sem cogitar de sua aplicabilidade.

Pergunta: A Matemática tem caráter universal? Ela vem sendo descoberta por nós, seres humanos, ou poderíamos compará-la a uma obra de arte, cuja configuração é determinada pelos interesses específicos e individuais dos matemáticos, como no seu próprio caso, ao interessar-se pela conjectura de Mordell?

Faltings: A Matemática se desenvolve a partir de bases diferentes. Uma visa às aplicações: tem-se um problema concreto, que é solucionado matematicamente. A outra base é de natureza intrínseca. Cada solução de um problema traz novos problemas. O desenrolar disto é em grande parte determinado por critérios estéticos. Ou por critérios decorrentes da personalidade individual. Um matemático sempre se ocupará de problemas que ele, pessoalmente, considera belos e interessantes.

Pergunta: E a vinculação com o mundo real não importa?

Faltings: Então eu lhe perguntaria — o que é que é real? Para mim, os objetos com que me ocupo existem na realidade. Portanto, são reais. Uma questão bem diferente se apresenta no tocante à aplicabilidade nas Ciências Naturais ou na Tecnologia.

Pergunta: Vejamos então o seu caso concreto. Existe alguma aplicabilidade de sua demonstração da conjectura de *Mordell?*

Faltings: Não, não vejo aplicações. Não seria honesto de minha parte, se eu afirmasse isto, pois não fiz a demonstração, visando a possíveis aplicações.

Pergunta: Por que é que você se dedica à Matemática?

Faltings: Eu diria que é principalmente a curiosidade de saber-se algo até as últimas conseqüências. No caso da conjectura de *Mordell,* ela me provocou por razões estéticas. Achei o problema interessante e passível de ser abordado.

Pergunta: Então, há um fascínio, um desafio intelectual. Poderíamos fazer uma comparação com uma partida de xadrez?

Faltings: Há uma certa semelhança, mas no jogo de xadrez temos um parceiro. Na Matemática não há esse elemento competitivo.

Pergunta: Será que é assim mesmo? Você não luta para resolver um problema?

Faltings: É verdade, mas o problema não se defende, ele está aí, simplesmente. É claro que há ocasiões de desânimo por não conseguirmos encontrar a solução. Isso se parece mais com a escalada de uma montanha. A montanha está aí, ela não muda de posição, ou conseguimos chegar lá em cima ou não.

Pergunta: A conjectura de *Mordell* ou talvez a conjectura de *Fermat* tem sido um desafio para você há muito tempo?

Faltings: A conjectura de *Fermat*, que conheço há muito tempo, nunca me motivou. Com a conjectura de *Mordell* ocupei-me apenas nos últimos 18 meses.

Pergunta: O que é que motivou você a ocupar-se com o problema?

Faltings: Alguém me colocou uma questão, e isso despertou meu interesse. Tive uma idéia e tentei pô-la em prática. Inicialmente, não foi possível, mas afinal tive sorte e cheguei à solução.

Pergunta: Foi sorte ou algo como uma inspiração?

Faltings: Eu tinha me ocupado antes com algo completamente diferente, muito mais abstrato, a chamada conjectura de *Tate*. Ao terminar esse trabalho, comecei a pensar na conjectura de *Mordell*, sem propriamente pretender resolver o problema. Quando se tem trabalhado por muito tempo em cima de determinado problema, é claro que a gente adquire uma certa sensibilidade para o assunto. A partir de então basta ver uma pista mínima.

Pergunta: Como é que você veio a dedicar-se à Geometria Algébrica?

Faltings: Certa vez, na Universidade de Münster um curso oferecido pelo Prof. Nastold despertou meu interesse. Além disso, aquele mestre também me impressionou como pessoa humana.

Pergunta: Todo aquele que estuda Matemática na Universidade enfrenta um certo risco, pois os empregos se situam principalmente no âmbito da pesquisa. Apesar dessa situação, você sempre queria dedicar-se à pesquisa?

Faltings: De certa forma sim. É claro que a gente tem dúvidas de vez em quando, se nossa capacidade dará conta do recado. Você sabe que há tantos que começam a estudar Matemática e só uma fração consegue permanecer na universidade. A gente se compara involuntariamente com os melhores matemáticos, ao ler seus tratados e fica com a impressão que a gente jamais poderá chegar até lá. No meu caso, ao comparar-me com os colegas, constatei que sabia um pouco mais do que eles.

Pergunta: Quer dizer que você teve mais leituras do que seus colegas de estudo?

Faltings: Certamente. E ao comparar-me com colegas de estudos, constatei que era capaz de raciocinar mais rapidamente. Isto de qualquer modo é imprescindível, quando se pretende entrar na pesquisa.

Pergunta: O que mais, além das leituras, você considera importante? Como é que você encara as discussões com outros especialistas sobre o assunto?

Faltings: Sem dúvida, cabe-lhes um importante papel. Mas depois tenho de recapitular tudo sozinho.

Pergunta: Quer dizer então que o trabalho decisivo é realizado solitariamente?

Faltings: Sim, é verdade que penso muito sozinho. É claro que não me sento três horas por dia para pensar. Isso acontece em etapas. Pois as idéias criativas que temos têm de ser todas examinadas, uma por uma. Por outro lado, 90% das idéias acabam sendo inviáveis. Mas com isto se aprende melhor o problema e se adquirem novas técnicas.

Pergunta: O que é que você acha do ensino da Matemática nas escolas, atualmente? Há uma tendência de se evitar que os alunos cheguem muito cedo à abstração. Desistiu-se, por exemplo, do ensino da Teoria dos Conjuntos nas escolas?

Faltings: Tenho a impressão que não entenderam bem o sentido da abstração no ensino da Teoria dos Conjuntos, que obviamente é um campo interessante. Mas na escola já estão acabando com ela, por exemplo quando ensinam que cinco peras formam um conjunto. Isto é uma trivialidade, e nada tem a ver com o pensamento matemático.

Pergunta: Com isso não se facilitou, ao menos, a compreensão desse conceito? Compreender que além de fazer cálculos com números, se pode também fazê-los com objetos quaisquer, como, por exemplo, com peras?

Faltings: A introdução de conceitos só tem sentido quando se entende a sua necessidade, quando se reconhece que eles de fato trazem uma vantagem. Na escola, porém, os conceitos abstratos são introduzidos como um fim em si mesmos. Com isso se complica desnecessariamente a Matemática.

Pergunta: Quer dizer que você, como matemático, não julga o raciocínio formal como o mais importante na Matemática?

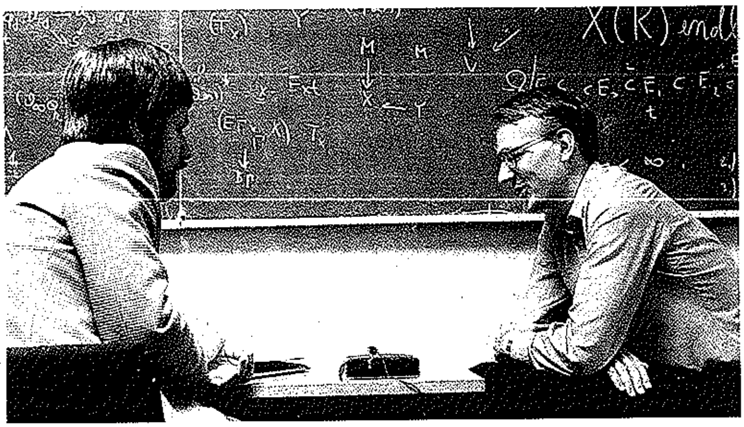
Faltings: Não. Acho que outras coisas seriam muito mais importantes. Por exemplo, é importante que os alunos possam chegar à uma conceituaçao de quantidade, que estejam em condições de avaliar relações de grandeza. O interessante na Teoria dos Conjuntos é que nela se pesquisa o conceito de infinito, mas isto não é sequer mencionado na escola Na escola aprende-se uma terminologia complicada que não conduz a nada, que não possa ser entendida apenas com o bom senso. Então para que ensinar isto tudo?

Pergunta: Como é que deveria ser, na sua opinião, o ensino da Matemática na escola?

Faltings: Em todo caso, os alunos deveriam aprender Aritmética. Considero também importante a Geometria Analítica, ou seja, a descrição de curvas por meio de equações, e o Cálculo Infinitesimal. Em suma, a formação aritmética tradicional.

Pergunta: E as universidades? Você acha que elas estão conseguindo formar os estudantes da melhor maneira possível? Aqui não estaria uma razão pela qual a universidade alemã não está na vanguarda?

Faltings: O problema é que em nossas universidades só existe um "mingau" padronizado. Não se exige o máximo dos bons alunos, desde o início do curso. Aqueles que tiverem talento, acabam se formando sem muito esforço. Mas para se chegar a bons resultados é preciso ter talento e trabalhar.



Gerd Faltings responde às perguntas de Uli Deker

Pergunta: Você esteve durante um ano na Universidade de Harvard...

Faltings: ... Ali as coisas são diferentes. Apenas 10% dos melhores alunos conseguem chegar até lá. Esses têm que aprender, redobradamente, e enfrentam um desafio permanente. Enquanto isso, em nossas universidades, as atividades acadêmicas têm de pautar-se pela qualificação média dos estudantes.

Pergunta: Não seria possível oferecer atividades especiais aos alunos excelentes?

Faltings: Há entre nós um empecilho de ordem social. Se dermos preferência a um bom aluno, ele ficará numa situação desconfortável, uma vez que não quer ser diferente de seus colegas. Importante seria oferecer mais aos bons alunos, desde o primeiro semestre, e não apenas em semestres mais avançados.

Pergunta: Como foram as suas experiências na Universidade de Harvard?

Faltings: Foram ótimas. Aceitaram-me imediatamente; havia muitas atividades e aproveitei bastante. A atmosfera acadêmica de lá é bem diferente da nossa: fala-se muito mais sobre Matemática. Aqui seria considerado de mau gosto falar de Matemática na hora do café. Lá, fala-se sobre o assunto praticamente dia e noite, porque todos são entusiastas da Matemática.

Pergunta: Como é que ocorre o progresso na Matemática? Nas Ciências Naturais verifica-se por meio de experimentos, quanto mais uma teoria nova se aproxima do objetivo de explicar a Natureza. Além de ser instância de controle, a Natureza indica a direção da pesquisa. Na Matemática, por sua vez, só conta o aspecto lógico de uma teoria, a sua coerência interna?

Faltings: Não é bem assim. Também na Matemática, uma teoria nova é julgada conforme os seus resultados, por exemplo se você pode demonstrar com ela algo que antes não era possível ser demonstrado.

Pergunta: Quer dizer que uma nova teoria sempre deveria responder a uma questão já formulada?

Faltings: Sim, pelo menos, deveria ser assim. Uma teoria nova implica em novas abstrações e novos conceitos. E então é preciso convencer os colegas da área, é preciso provar que a nova teoria é melhor ou mais elegante que as precedentes.

Pergunta: Como é o caso da comprovação de uma demonstração, por exemplo, no seu caso? Haverá colegas que vão comprovar a sua demonstração da conjectura de *Mordell*?

Faltings: Com certeza. Muitos também vão examinar o meu trabalho, pois poderão utilizar a metodologia para seus próprios objetivos.