

NOTAS DE ENSINO

CONTATO DE CURVAS, CÍRCULO OSCULADOR E INTEGRAIS DE FRESNEL

Geraldo Ávila

Introdução

A presente nota foi inspirada num interessante trabalho de J. Zeitlin [5]. Praticamente, o que fazemos é expandir tal trabalho, incluindo fatos elementares, porém muito interessantes e pouco notados da teoria do contato de curvas planas, dos quais o que se observa no contato de uma curva com o círculo osculador num de seus pontos é apenas um caso particular.

Contato de duas Curvas

Consideremos duas curvas, dadas nas formas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, onde f e g são funções contínuas num intervalo I , com derivadas contínuas até a ordem que necessitamos considerar. Seja x_0 um ponto interior a I e $P_0 = (x_0, y_0)$ um ponto onde as duas curvas se tocam, isto é,

$$y_0 = f(x_0) = g(x_0).$$

Diz-se que as curvas têm em P_0 um contato de 1^{a} ordem se elas têm a mesma reta tangente em P_0 , porém $f''(x_0) \neq g''(x_0)$. Diz-se que o contato é de ordem $n \geq 1$ se as funções e suas derivadas coincidem em x_0 até a ordem n , mas não na ordem $n+1$, isto é, se

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0), \quad i=0,1,\dots,n; \quad f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0).$$

A Fig. 1 ilustra contato de 1^{a} ordem, em $x = 0$, entre a curva $y = e^x$ e sua tangente $y = 1+x$; na Fig. 2 temos um contato de 2^{a} ordem entre as curvas $y = e^x$ e $y = 1+x+x^2/2$, em $x=0$; e a Fig. 3 mostra um contato de 3^{a} ordem, também em $x = 0$, entre as curvas

$$y = e^x \quad \text{e} \quad y = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

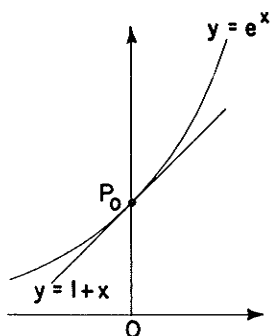


Fig. 1

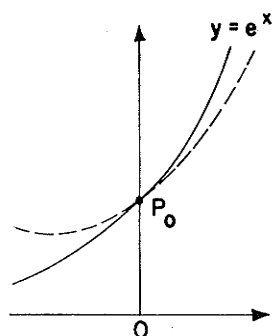


Fig. 2

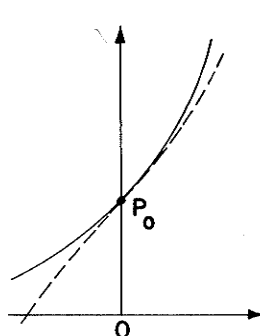


Fig. 3

O leitor deve notar, nesses exemplos, que as curvas se cruzam — isto é, uma atravessa a outra — no caso da Fig. 2, mas não nos casos das Figs. 1 e 3. Esse é um fenômeno interessante e de caráter geral, que estabeleceremos a seguir.

Teorema. *Dois curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$, que se tocam num ponto $P_0 = (x_0, y_0)$, sempre se cruzam nesse ponto se elas têm a l contatado de ordem par; e não se cruzam se o contatado é de ordem ímpar.*

Para demonstrar esta propriedade, recorreremos ao desenvolvimento de Taylor da função diferença,

$$h(x) = f(x) - g(x): \quad (1)$$

$$h(x) = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{h^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

$$R_n(x) = \frac{h^{(n+1)}(x')}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

onde x' está compreendido entre x_0 e x . Supondo que as curvas tenham contatado de ordem n em P_0 , o desenvolvimento acima assume a forma

$$h(x) = \frac{h^{(n+1)}(x')}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \quad (2)$$

Como $h^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - g^{(n+1)}(x)$ é uma função contínua em x_0 , existe $\delta > 0$ tal que $h^{(n+1)}(x')$ se mantém diferente de zero e com o mesmo sinal de $h^{(n+1)}(x_0)$ desde que $|x' - x_0| < \delta$. Mas isto certamente acontece quando $|x - x_0| < \delta$, pois x' está compreendido entre x_0 e x .

Vamos considerar n par e n ímpar separadamente. Suponhamos primeiro que n seja ímpar, de sorte que $n+1$ é par e $(x-x_0)^{n+1}$ é sempre positivo para $x \neq x_0$. Então a expressão (2) nos mostra que (1) permanece sempre com o sinal de $h^{(n+1)}(x_0)$ para todo $x \neq x_0$ na vizinhança

$$V_\delta: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta;$$

$f(x)$ será sempre maior que $g(x)$ se $h^{(n+1)}(x_0) > 0$ (Fig. 4a) e sempre menor que $g(x)$ se $h^{(n+1)}(x_0) < 0$ (Fig. 4b).

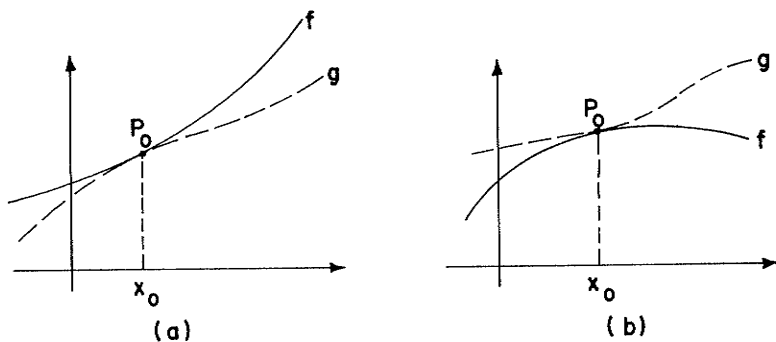


Fig. 4

Ao contrário, se n for par, $n+1$ será ímpar e $(x-x_0)^{n+1}$ será positivo para $x > x_0$ e negativo se $x < x_0$. Em consequência, $h(x)$ mudará de sinal quando x passar de $x < x_0$ a $x > x_0$ na vizinhança V_δ . Consequentemente, $f(x) - g(x)$ terá o mesmo sinal de $h^{(n+1)}(x_0)$ à direita de x_0 e sinal oposto à esquerda de x_0 , x sempre em V_δ , é claro. As Figs. 5a e 5b ilustram essas duas situações e aqui termina a demonstração do teorema.

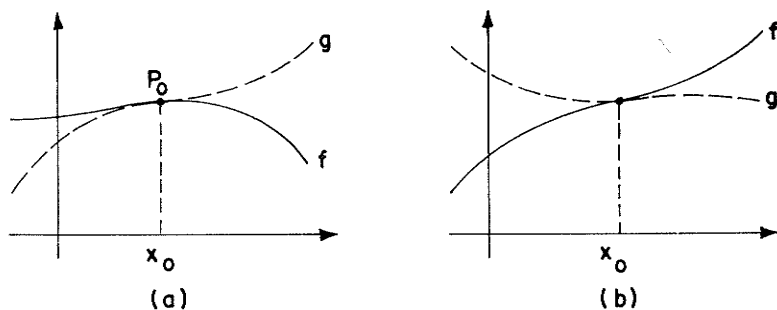


Fig. 5

Círculo osculador

O círculo osculador a uma curva C num de seus pontos é o círculo que tem com a curva nesse ponto contato de máxima ordem. Como veremos a seguir, esse contato é, em geral, de ordem 2, de sorte que o círculo osculador atravessa a curva no ponto de contato, exceto no caso excepcional em que o contato é ordem > 2 .

Vamos determinar os parâmetros a , b , ρ , de forma que o círculo

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \rho^2 \quad (3)$$

tenha contato de 2^{a} ordem, pelo menos, com a curva $y = f(x)$ no ponto $P = (x_0, y_0)$, onde $y_0 = f(x_0)$. Usaremos a notação $y_1 = f'(x_0)$ e $y_2 = f''(x_0)$. Como $f(x_0)$, $f'(x_0)$ e $f''(x_0)$ de vem coincidir com os valores correspondentes da função implícita $y = y(x)$ proveniente da eq. 3, esta equação e suas derivadas 1^{a} e 2^{a} , com $x = x_0$, nos dão:

$$\begin{aligned} (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 &= \rho^2, \\ x_0 - a + (y_0 - b)y_1 &= 0, \\ 1 + (y_0 - b)y_2 + y_1^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Temos aqui três equações para determinar a , b e ρ . Supondo $y_2 \neq 0$, obtemos:

$$a = x_0 - \frac{1 + y_1^2}{y_2} y_1, \quad b = y_0 + \frac{1 + y_1^2}{y_2}, \quad \rho = \frac{1 + y_1^2}{|y_2|} \sqrt{1 + y_1^2}.$$

Como se vê, o círculo fica completamente determinado pela condição de ter com a curva contato de ordem ≥ 2 . Este é o chamado *círculo osculador*, cujo raio ρ é o raio de curvatura da curva C no ponto P_0 .

É claro que o contato pode ser de ordem maior que 2, mas para isto é preciso que $y'''(x_0) = f'''(x_0)$. Ora, uma 3ª derivação de (3), com a substituição de x por x_0 e a notação $y_3 = f'''(x_0)$, nos dá:

$$y'''(x_0) = \frac{3y_1 y_2}{b - y_0} = \frac{3y_1 y_2}{1 + y_1^2},$$

de sorte que o contato só será de ordem ≥ 3 se

$$y_3 = \frac{3y_1 y_2}{1 + y_1^2}. \quad (5)$$

É claro que podemos também determinar a , b , ρ satisfazendo as primeiras duas equações de (4), mas não a terceira. Obtemos assim uma família de círculos tangentes à curva, cada um dos quais tendo com ela contato de 1ª ordem. A Fig. 6 ilustra vários desses círculos e também o círculo osculador.

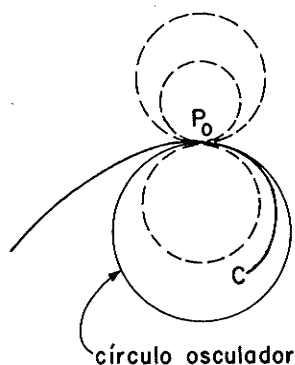


Fig. 6

A hipótese $y_2 \neq 0$ corresponde ao caso em que a curvatura $\kappa(x_0)$ é diferente de zero, onde (veja [1], p. 201)

$$\kappa(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{3/2}}.$$

Vamos supor que a curvatura seja crescente ou decrescente numa vizinhança de $x = x_0$; logo, $\kappa'(x_0) \neq 0$. Mas

$$\kappa'(x_0) = \frac{1}{(1 + y_1^2)^{3/2}} \left(y_3 - \frac{3y_1 y_2^2}{1 + y_1^2} \right)$$

de sorte que a condição (5) não se verifica e o contato do círculo osculador com a curva é estritamente de 2^a ordem. Concluimos, pois, que o círculo osculador sempre atravessa a curva quando $\kappa'(x_0) \neq 0$, como ilustra a Fig. 6.

O leitor há de convir que esta propriedade tem um forte conteúdo intuitivo. De fato, se a curvatura é, digamos, crescente, como indica a Fig. 6, então o raio de curvatura $\rho = 1/\kappa$ é decrescente; esse raio, à esquerda de P_0 , é maior que seu valor em P_0 e menor que seu valor à direita de P_0 . Em consequência, o círculo osculador em P_0 deve estar "por dentro" de C à esquerda de P_0 e "por fora" de C à direita de P_0 .

É claro que se $\kappa'(x_0) = 0$, o círculo osculador terá com a curva contato de 3^a ordem pelo menos. A Fig. 7 ilustra a parábola $y = x^2$, cujo círculo osculador em $x = 0$,

$$4x^2 + (2y - 1)^2 - 1 = 0,$$

tem contato de 3^a ordem com a parábola. Ele permanece de um só lado da curva.

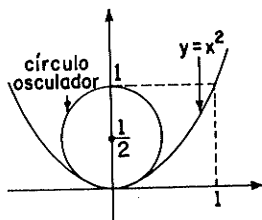


Fig. 7

A hipótese $y_2 \neq 0$ é indispensável, pois, se $y_2 = 0$, a última equação em (4) nunca estará satisfeita e todos os círculos tangentes a C em P_0 terão contato de 1ª ordem com a curva. O círculo osculador, para existir, teria de ter raio infinito, já que neste caso a curvatura seria zero em $x = x_0$. Em particular, se $y_2 = 0$ em um intervalo, a curva se reduz a uma reta nesse intervalo.

Círculos osculadores encaixantes

Consideremos uma curva plana $P = P(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco s , cuja curvatura $\kappa(s)$ supomos diferente de zero. A *evoluta* da curva é definida como sendo o lugar geométrico de seus centros de curvatura

$$Q(s) = P(s) + \rho(s)N(s), \quad (6)$$

onde $N(s)$ é o vetor normal à curva ([1], p. 199 ou [2], p. 29). Como $N' = -\kappa P'$ ([2], p. 31), derivando (6) obtemos:

$$Q' = P' + \rho'N + \rho N' = P' + \rho'N - \rho\kappa P',$$

isto é,

$$Q'(s) = \rho'(s)N(s), \quad (7)$$

pois $\rho\kappa = 1$.

De (7) segue-se que a curva é regular se $\rho'(s) \neq 0$. Vamos fazer esta hipótese e, para fixar as idéias, suporemos $\rho'(s) < 0$, sem perda de generalidade. Portanto, o raio de curvatura é uma função decrescente de s . Provaremos, em seguida, um resultado muito interessante para curvas do tipo que vimos considerando. Trata-se de um teorema que se encontra em Stoker ([4], p. 31).

Teorema. *Dada uma curva plana com raio de curvatura decrescente como função do comprimento de arco, seus círculos osculadores formam uma família de círculos encaixantes, cujas circunferências não se tocam.*

Para provar este teorema notemos que o elemento de arco ao longo da evoluta, de acôrdo com (7), é dado por

$$|Q'(s)|ds = -\rho'(s)ds,$$

pois $|N(s)| = 1$ e $\rho'(s) < 0$. Então, o comprimento de arco, ao longo da evoluta, entre dois valores s_1 e s_2 , com $s_1 < s_2$, é dado por

$$L_{12} = -\int_{s_1}^{s_2} \rho'(s)ds = \rho(s_1) - \rho(s_2).$$

Como $N'(s) = -\kappa P' \neq 0$, $N(s)$ não é constante, logo o arco de evoluta entre os centros de curvatura C_1 e C_2 (Fig. 8) supera a distância entre estes centros: $L_{12} > d(C_1, C_2)$, isto é,

$$d(C_1, C_2) < \rho(s_1) - \rho(s_2).$$

Isto mostra que o círculo osculador em $P(s_2)$ está contido no círculo osculador em $P(s_1)$, o que completa a demonstração do teorema

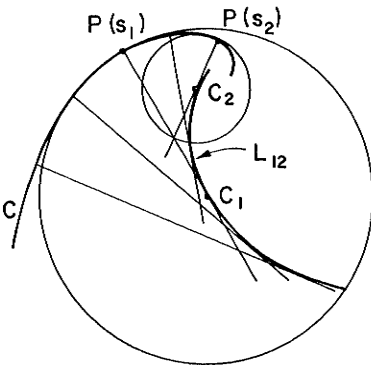


Fig. 8

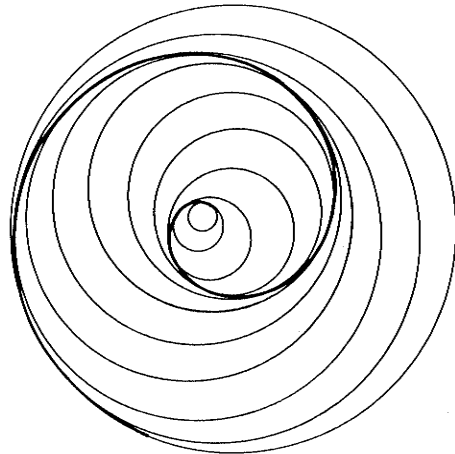


Fig. 9

A Fig. 9 ilustra a espiral $r = \theta$ e vários de seus círculos osculadores. A Fig. 10 reproduz uma interessante ilustração da mesma curva e seus círculos osculadores, que aparece no trabalho de J. Zeitlin [5].

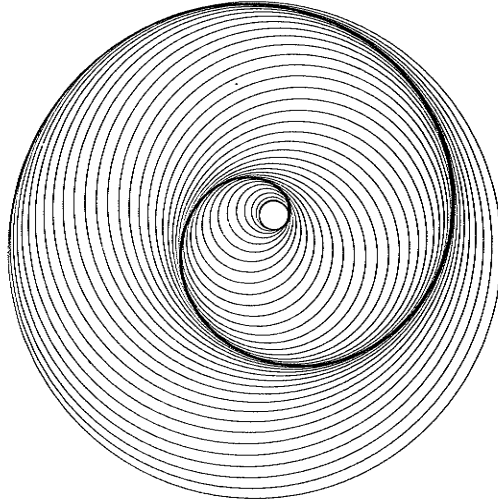


FIG. 10

As integrais de Fresnel

As franjas de interferência observadas num anteparo que recebe luz difratada por um obstáculo semi-plano são explicadas em termos das integrais de Fresnel ([3], p. 239 e seguintes), assim definidas:

$$C(s) = \int_0^s \cos t^2 dt, \quad S(s) = \int_0^s \sin t^2 dt. \quad (8)$$

A curva

$$P(s) = (C(s), S(s)) \quad (9)$$

é chamada *espiral de Cornu* (Fig. 11).

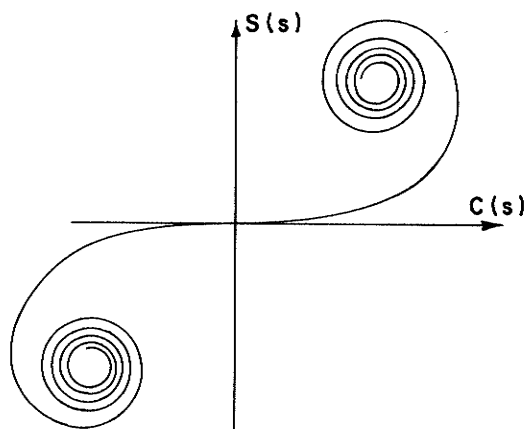


Fig. 11

É fácil provar a convergência dessas integrais com $s \rightarrow \infty$; basta fazer a mudança de variáveis $t^2 = \tau$ e depois integrar por partes:

$$2 \int_1^s \cos t^2 dt = \int_1^{s^2} \frac{\cos \tau}{\sqrt{\tau}} d\tau = \frac{\operatorname{sen} \tau}{\sqrt{\tau}} \Big|_1^{s^2} + \int_1^{s^2} \frac{\operatorname{sen} \tau}{\tau \sqrt{\tau}} d\tau.$$

No entanto, o teorema da seção anterior fornece uma interessante demonstração dessa convergência, que reproduzimos a seguir.

Como é fácil verificar, de (8) e (9) obtemos $|P'(s)| = 1$; logo, s é o comprimento de arco ao longo da curva (9). Utilizando a fórmula de $\kappa(s)$ ([1], p. 201), encontramos $\rho(s) = 1/\kappa(s) = 1/2s$. Isto mostra que $\rho(s) \rightarrow 0$ com $s \rightarrow \infty$. Em consequência disto e do teorema da seção anterior, os círculos osculadores à espiral de Cornu, nos pontos correspondentes a $s = 1, 2, 3, \dots$ formam uma sequência de conjuntos encaixantes, cujos diâmetros, por sua vez, formam a sequência $d_n = 1/n$ que tende a zero. Pelo conhecido teorema de Cantor, a interseção dos círculos (discos) osculadores é um ponto $P_0 = (C_0, S_0)$. Como

$$d(P(s), P_0) \leq 2\rho(s) = \frac{1}{s}$$

tende a zero com $s \rightarrow \infty$, concluimos que $C(s)$ e $S(s)$ também convergem, com $s \rightarrow \infty$, para C_0 e S_0 respectivamente.

Referências Bibliográficas

- [1] G. Ávila, *Cálculo 2*, LTC Editora.
- [2] G. Ávila, *Cálculo 3*, LTC Editora.
- [3] A. Sommerfeld, *Optics*, Academic Press.
- [4] J.J. Stoker, *Differential Geometry*, Witey-Interscience.
- [5] J. Zeitlin, *Nesting Behavior of Osculating Circles and the Fresnel Integrals*, *Mathematics Magazine*, 54 (1981) 76-78.

Departamento de Matemática
Universidade de Brasília
70.910 Brasília, D.F.