SEÇÃO DE PROBLEMAS

A partir deste número a Matemática Universitária publicará regularmente uma seção de problemas propostos por seus leitores. De sua colaboração dependerá a vitalidade desta iniciativa. O Comitê Editorial manterá critérios de seleção, tentando apresentar problemas bonitos, interessantes e ... solúveis! Propostas e/ou soluções deverão ser enviadas a qualquer dos membros do Comitê Editorial. As soluções aos problemas de cada número aparecerão, na medida do possível, no número seguinte.

Problema 1

a) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e satisfazendo $f(x) > 0$ para $x \neq 0$, $f^{(p)}(0) = 0$, $p = 0,1,2$. Mostre que $\sqrt{f}$ é de classe C^1.

b) Suponha agora que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja de classe C^∞, $f(x) > 0$ para $x \neq 0$ e que $f^{(p)}(0) = 0$, $p = 0,1,2,\ldots$. Pode-se concluir que $\sqrt{f}$ é de classe C^∞?

(proposto por Paulo Cordaro)

Problema 2

Definem-se números inteiros $a_n^{(k)}$ para $n \geq 2$ e para $-1 \leq k \leq n$, pelas igualdades:

1. $a_n^{(-1)} = 0$ e $a_n^{(0)} = 1$ para todo $n \geq 2$.
2. $a_2^{(1)} = a_2^{(2)} = 1$.
3. $a_n^{(k)} = {}_{n-1}^{(k)} + a_{n-1}^{(k-1)} + a_{n-1}^{(k-2)}$ se $1 \leq k < n$.
4. $a_n^{(n)} = a_{n-1}^{(n-2)}$ para todo $n > 2$.

Se obtem assim um triângulo de números cujas primeiras linhas são

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ & 0 & 1 & 3 & 6 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 10 & 15 & 15 & 6 \end{array}$$

Provar que para todo primo p verificam-se as congruências

$$a_p^{(1)} \equiv -1 \pmod p, \quad a_p^{(k)} \equiv 0 \pmod p \quad \text{se} \quad 1 < k < p \quad \text{e} \quad a_p^{(p)} \equiv 1 \pmod p.$$

(proposto por Alfredo Jones)

Problema 3

Considere $\mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue λ e A um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}$. Suponha que $A + \mathbb{Q} = A$ onde $A + \mathbb{Q} = \{a+q \mid a \in A, \ q \in \mathbb{Q}\}$. É possível afirmar que nestas condições $\lambda(A) = 0$ ou $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$?

(proposto por Rui Exel Filho)

8ª ESCOLA LATINO-AMERICANA DE MATEMÁTICA

A 8ª Escola Latino-Americana de Matemática terá lugar no IMPA, Rio de Janeiro entre os dias 14 e 25 de julho de 1986.

Serão oferecidos quatro cursos, em nível de doutorado, lecionados por matemáticos latino-americanos, cujas notas serão preparadas com antecedência para distribuição aos participantes. Os cursos programados são:

1. "Sistemas de Campos Vetoriais Complexos" (*Paulo Cordaro*)
2. "Tópicos em Análise não-Linear e Aplicações às Equações Diferenciais" (*David G. Costa*)
3. "Análise Microlocal e Teoria de Espalhamento" (*Gunther Uhlmann*)
4. "Métodos de Continuação em Equações Elíticas não-Lineares" (*Luis Caffarelli*)

Os seguintes matemáticos já confirmaram sua participação:

A. Ambrosetti, M. Baouendi; M. Ben-Artzi; P. Bérard; H. Brézis; F. Browder; A. Calderón; Y Colin de Verdière; M. Crandall; V. Enss; J.P. Gossez; A. Grumbaum; A. Haraux; L. Hörmander; H. Jacobowitz; M. Lapidus; A. Lazer; R. Melrose; S. Mizohata; R. Nagel; L. Nirenberg; P. Rabinowitz; J. Ralston; D. Robert; L. Rodino; J. Sjöstrand, M. Struwe; F. Trèves; E. Trubowitz; E. Zehnder.

Além disso a reunião contará com a participação de vários conferencistas latino-americanos.