

RESENHA DE LIVROS

TEORIA GEOMÉTRICA DAS FOLHEAÇÕES

Carlos Frederico Borges Palmeira

*Por César Camacho e Alcides Lins Neto,
Profeto Euclides - Instituto de Matemática
Pura e Aplicada - 1979 [Geometric Theory
of Foliations, Birkhauser, Boston,
1985.]*

O estudo das folheações (ou estruturas folheadas) começou nos anos 40 com os trabalhos de Ehresmann e Reeb.

Mas o que é uma folheação?

Consideremos uma equação diferencial ordinária $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ tal que P e Q não se anulam simultaneamente e têm derivadas parciais contínuas. Sabemos que em cada ponto do plano passa uma única curva, solução da equação, e as soluções satisfazem à seguinte condição de regularidade, conhecida como teorema do fluxo tubular: "Cada ponto tem uma vizinhança na qual está definida uma mudança de coordenadas, tal que nas novas coordenadas (u,v) as soluções da nossa equação são as retas $u = \text{cte.}$ ". Temos então o plano decomposto em curvas satisfazendo à condição de regularidade de acima. Uma tal decomposição é o que se chama uma folheação do plano.

Esta definição de folheação do plano se estende facilmente a superfícies. Por exemplo, no cilindro $x^2 + y^2 = 1$, os círculos horizontais constituem uma folheação, as retas verticais constituem outra.

Aqui já surge um dos problemas mais estudados em folheações: Em que superfície há folheações?

Este problema equivale a saber em que superfícies há campos de linhas tangentes sem singularidades. Para superfícies compactas, só há duas: o toro (câmara de ar de pneu) e a garrafa de Klein, que não é orientável e não pode ser mergulhada em R^3 .

Se considerarmos agora superfícies de dimensão $n > 2$, podemos definir folheação de dimensão $q < n$ (ou como se diz usualmente de codimensão $n-q$) como uma decomposição em superfícies de dimensão q , chamadas *folhas*, satisfazendo a condição de regularidade: "todo ponto tem uma vizinhança na qual está definida uma mudança de coordenadas tal que nas novas coordenadas (u_1, \dots, u_n) as folhas são dadas pelas equações $u_1 = \text{cte.}, u_2 = \text{cte.}, \dots, u_{n-q} = \text{cte.}$

Exemplo: considere os gráficos $y = \frac{1}{1-x^2} + k$, definidos para $x \in (-1, 1)$. (Figura 1.) Girando esta figura em torno do eixo y e completando com cilindros co-axiais, obtemos uma folheação de R^3 com folhas que são topologicamente planos e cilindros. (Figura 2.)

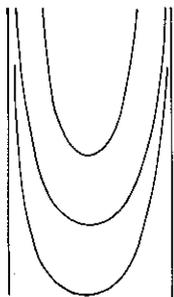


Fig. 1

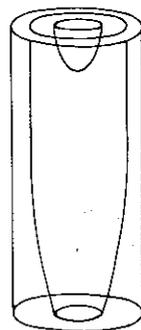


Fig. 2

A existência de folheações em superfícies compactas de dimensão maior que 2 é um problema que tem ocupado muitos topólogos ao longo dos anos. Reeb em 1944 construiu uma folheação de dimensão 2 (codimensão 1) na esfera S^3 (esfera do R^4).

O exemplo de Reeb, fundamental para o desenvolvimento da teoria, é suficientemente simples para poder ser descrito aqui. Em primeiro lugar vamos construir uma folheação no toro sólido, tangente ao bordo.

Se pensamos no toro como uma câmara de ar, toro sólido é a câmara e mais o ar que está dentro. Basta tomar o cilindro sólido da Figura 2, cortar pelos planos, $y = 1$ e $y = -1$ e identificar as bases para formar o toro sólido. (Figura 3.) As folhas são como cobras engolindo o próprio rabo.

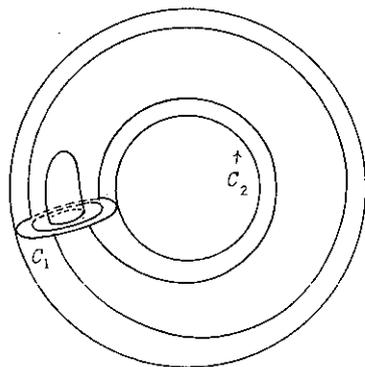


Fig. 3

Agora o pulo do gato: tal como, se colarmos 2 discos pelas fronteiras obtemos a esfera S^2 do R^3 , se colarmos 2 toros sólidos pela fronteira, obtemos a esfera S^3 do R^4 . Não é difícil acreditar nisto. Do mesmo modo que removendo um ponto de S^2 e abrindo, obtemos R^2 , removendo um ponto de S^3 e abrindo, obtemos R^3 .

Vamos então pegar o R^3 com o nosso toro sólido lá mergulhado e recompor o S^3 acrescentando o ponto do infinito. Temos assim nosso toro dentro de S^3 . Agora vamos remover de S^3 um ponto que estava originalmente dentro da câmara de ar. Obtemos R^3 , com um toro dentro, só que houve uma inversão de regiões: o que era dentro agora é fora e o que era fora, passou para dentro. Ou seja, o exterior de um toro sólido em R^3 , fica o interior de um outro toro sólido quando acrescentamos o ponto do infinito para obter S^3 .

Observe que os círculos C_1 e C_2 têm propriedades distintas quando olhamos por dentro ou por fora. No lado de dentro, o círculo

culo C_1 pode ser deformado a um ponto e o C_2 não pode. No lado de fora é ao contrário. Por isso dizemos que a colagem dos 2 toros sólidos é feita paralelo com meridiano e meridiano com paralelo.

Este exemplo de Reeb levantou o problema de saber se toda folheação de codimensão 1 em superfície compacta de dimensão 3 têm obrigatoriamente uma folha compacta,

Esta pergunta foi respondida por Novikov em 1964, quando foi mostrado que se o ambiente é uma superfície com grupo fundamental finito (como a esfera S^3) então existe uma folha que é um toro, o qual é fronteira de um toro sólido folheado como no exemplo de Reeb. Um tal toro sólido, até hoje chama-se "componente de Reeb".

A série de trabalhos de Novikov nesta época fez com que no Congresso Internacional de Matemática de 1970 ele fosse um dos ganhadores da medalha Fields.

Aliás, este não é o único prêmio associado às folheações. Em 1975, B. Lawson recebeu o Steele prize da American Mathematical Society por seu artigo *Foliations*, Bull. A.M.S. (1974) e no último congresso internacional dois dos ganhadores da medalha Fields, (W. Thurston e A. Connes) haviam dado importantes contribuições à área.

Após vários resultados parciais do tipo: a superfície X não admite (ou admite) folheação de codimensão y , em 1976, W. Thurston mostrou que se uma superfície de dimensão n admite um campo de vetores tangentes sem singularidades, então ela tem uma folheação de codimensão 1. Em codimensão maior o problema continua aberto.

No Brasil a atividade nesta área não é recente. Em 1957 no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática, G. Reeb deu um curso sobre folheações cujas notas, redigidas por Mauricio Matos Peixoto, e publicadas pelo IMPA, constituem o primeiro texto de caráter didático-espositório sobre o assunto.

Em 1965, Elon Lima deu importante contribuição ao demonstrar que não existem campos comutativos linearmente independentes em todo ponto, tangentes à esfera S^3 .

Em 1971, no Simpósio Internacional de Sistemas Dinâmicos organizado pelo IMPA em Salvador, foram apresentados vários trabalhos sobre folheações (atas publicadas em 1973 pela Academic Press).

Em 1973, G. Joubert, da Universidade de Dijon (França), visitou a Universidade Federal Fluminense e deu um curso sobre folheações, cujas notas mimeografadas não foram infelizmente publicadas.

Em 1974, Paul Schweitzer (PUC/RJ) resolveu a chamada "conjectura de Seifert", construindo uma folheação em S^3 , de dimensão 1, sem folha compacta.

Em 1976, houve duas reuniões internacionais no Brasil onde se apresentaram trabalhos sobre folheações. Em janeiro, a Escola de Topologia, na PUC/RJ, cujos temas principais foram classes características de folheações e cohomologia de Gelfand-Fuks (classes características são invariantes de topologia algébrica que podem ser associados a folheações); em julho a 3^a Escola Latino-Americana de Matemática, no IMPA cujos temas principais foram Topologia e Geometria. Nesta, Paul Schweitzer deu um curso sobre folheações cujas notas também não foram publicadas. Ambas as reuniões tiveram atas publicadas na coleção Lecture Notes in Mathematics, da Springer-Verlag, sob os nºs. 652 e 597 respectivamente.

Finalmente em 1977, C. Camacho e A. Lins Neto deram um curso no 11º Colóquio Brasileiro de Matemática, cujas notas publicadas pelo IMPA, como ocorre com muitos cursos de Colóquio, constituíram a versão preliminar do livro Teoria Geométrica das Folheações publicado em 1979.

Recentemente foram publicados no exterior 3 livros sobre o assunto, que vêm se juntar ao de B. Lawson de 1977 (Lecture on the quantitative theory of foliations, publicado pela American Math. Society). São eles: Introduction to the geometry of foliations de G. Hector e U. Hirsch (Vieweg 1981), Differential Geometry of foliations de B. Reinhart (Springer-Verlag 1983), Feuilletages-Études Geometriques de C. Godbillon (Universidade de Estrasburgo 1983). Todos eles entretanto exigem do leitor uma maturidade matemática e, é claro, refletem os interesses bastante diversos dos seus autores.

Acredito que, pela clareza da exposição, feita em nível elementar (afinal um curso de Colóquio não é para especialistas) e pela escolha dos tópicos, enfatizando folheações de codimensão 1, o livro de César Camacho e Alcides Lins ainda é, de longe, o mais adequado para um primeiro contato com as folheações. Ao final de cada capítulo são apresentadas sob forma de notas, resultados interessantes, relacionados com o que se acabou de ver, mas não necessários ao entendimento dos capítulos seguintes. Sem sentir, o leitor vai tomando contato com uma enorme gama de linhas de pesquisa na área. Ao final do livro, 57 exercícios complementam e ajudam a fixação do material lido.

Não é a toa que a editora Birkhäuser acaba de publicar sua tradução em inglês; afinal o interesse por este livro sempre foi grande. Eu mesmo já enviei vários exemplares em português a pesquisadores do exterior que tinham ouvido falar que no Brasil havia um bom livro sobre folheações e, ao me saber brasileiro, me pediam para lhe conseguir um exemplar. (Mais uma vez a Europa se curva ante o Brasil!)

A atividade na área de folheações continua intensa no Brasil e no exterior. Além dos métodos de Topologia Diferencial, há muitos resultados envolvendo Topologia Algébrica, Teoria da Medida, Sistemas Dinâmicos, Geometria Diferencial, Análise Real e Complexa.

Recentemente, C. Godbillon, um dos mais respeitados especialistas na área, compilou uma bibliografia cobrindo 40 anos de folheações, 1944-1984. Lá encontramos os nomes de E.L. Lima, C. Camacho, A. Lins Neto, J. Palis e C. Gutierrez do IMPA, P. Schweitzer, A. Whitman, J.L. Arraut, C.F.B. Palmeira e H. Browne da PUC/RJ, A. Medeiros da UFRN, F. Brito do IME/USP e L.A. Fãvaro do ICMS- USP. Vale observar que a PUC/RJ tem um programa de doutorado em Topologia Diferencial e Algébrica, com ênfase em folheações.

Nota da Redação. Ao citar as contribuições feitas por matemáticos brasileiros à teoria das folheações, o autor da resenha acima omitiu o importante trabalho de C.F.B. Palmeira (Annals of Mathematics, vol. 107 (1978) págs. 109-131), no qual ele prova que toda folheação de \mathbb{R}^n ($n > 3$) na qual as folhas são conjuntos fechados homeomorfos a \mathbb{R}^{n-1} é o produto de uma folheação do plano \mathbb{R}^2 pelo espaço euclidiano \mathbb{R}^{n-2} .