CURSO DE ANÁLISE

Paulo Sad

Curso de Análise, de Elon Lages Lima. Instituto de Matemática Pura e Aplicada e CNPq. Rio de Janeiro, volume II, Projeto Euclides.

Os comentários que se fazem aqui sobre o Curso de Análise, vol. 2, do Prof. Elon Lages Lima procuram situar-se na dupla perspectiva na obra matemática e da obra didática. Tal abordagem deveria começar pelas perguntas óbvias: a que público destina-se o livro? Ou: a que público convém?

Ora, pelo privilégio da oportunidade de escrever em Matemática Universitária, fui aconselhado a substituir a pergunta. Tornou-se ela: o que se espera de um Mestre em Matemática no Brasil em termos da formação adquirida em seu curso?

As respostas podem naturalmente ser influenciadas pelos interesses matemáticos dos pesquisadores responsáveis pelos vários mestrados em nosso país.

Eu adotarei um ponto de vista restrito: mesmo com um olho na formação de futuros pesquisadores, a maioria absoluta dos estudantes constitui-se de futuros professores universitários que devem dominar os assuntos sob sua responsabilidade, e dominar com perspectiva de conjunto. Em particular, devem ter condições plenas de lecionar Cálculo a uma e a várias variáveis,

Discutiremos inicialmente a formação necessária para o desempenho desta tarefa, e a seguir a contribuição trazida pelo livro objeto deste artigo.

A referida formação se adquire lentamente. O Cálculo ensinado no começo do curso superior atende a um vasto elenco de aspirações profissionais; por isto escapole-se judiciosamente de uma formulação rigorosa preferindo-se as aplicações. E, concordemos, que aplicações! Bastaria mencionar: adquire-se o passaporte para o universo descrito pela mecânica newtoniana (o que mais se compara em termos de impacto? Talvez a visão físico-geométrica do universo oferecida pela Teoria da Relatividade). Uma celebração, de fato.

Passada esta fase, chega-se à idade da razão, a hora do rigor e do formalismo, justificando os métodos anteriormente utilizados. Tal etapa tem à sua disposição metade do Bacharelado e todo o Mestrado. Vamos então discutir como se pode aproveitar este tempo, sem preocupação acerca de sua distribuição face aos vários assuntos; isto depende muito da disposição de professores e estudantes.

Em primeiro lugar, mantenho em mente alguns princípios básicos:

- O estudante precisa adestrar-se em contas e dispor de um arsenal de exemplos ilustrativos, discutidos à exaustão.
- Deve-se atingir de forma segura um nível criativo de rigor. Muitos crêem que isto se consegue em cursos introdutórios sobre Teoria dos Conjuntos, Lógica ou Álgebra. Prefiro um curso de Geometria Euclidiana, para os iniciantes, ou um curso de Análise na Reta, para os iniciados. Em ambos os casos, a intuição auxilia muito e evita rebuscamentos inúteis de situações imaginárias (além de pregar alguns sustos — por exemplo, com as curvas de Peano ou os rearranjos de séries condicionalmente convergentes).
- Depois de um início espetacular e instigante nos Cálculos, não se pode condenar o estudante à sisudez do Rigor, a refazer eternamente de modo cada vez mais perfeccionista resultados anteriores. Não é conveniente servir-lhes algumas doses de novidades? Que tal aproveitar as oportunidades para instilar, através de exemplos e situações concretas, a noção de estrutura matemática, que liga vários assuntos, descomplicando-os e reduzindo-os à sua essência?

Após as generalidades, dediquemo-nos ao conteúdo. Qual material poderia constar da formação do futuro Mestre? Farei uma pequena lista.

1 - **Geometria Euclidiana**. Talvez uma sugestão radical, mas útil para quem está inseguro na rotina definição — teorema — demonstração. A abordagem pode refinar-se dependendo do treinamento anterior do estudante. Como corolário, diminuem os traumas freqüentes do curso de Análise na Reta.

2 - **Análise na Reta**. Como é tradicional, consta de: completamento da reta, continuidade e diferenciabilidade de funções, integral de Riemann, seqüências e séries de funções.

3 - **Equações Diferenciais Lineares** (Ordinárias e Parciais). O estudo das equações diferenciais ordinárias lineares homogêneas é uma ótima oportunidade para sedimentar o curso de Álgebra Linear e se adquirir a noção de que uma mesma estrutura — a linear — está presente em distintas situações. Além do que, precisamos da forma canônica de Jordan para resolver sistemas lineares. Paralelamente, noções básicas sobre espaços de Hilbert (ou ortogonalidade em espaços de funções) podem ser introduzidos em conexão com as séries de Fourier, presentes nas equações da onda, calor e Laplace com condições de contorno apropriadas. O método de separação de variáveis conduz a equações diferenciais ordinárias do tipo Sturm-Liouville, ótima ocasião para se trabalhar com autovalores, autovetores e diagonalização de transformação lineares simétricas.

4 - **Análise Diferencial**. Penso ser importante reconhecer o contraste linearidade — não linearidade; a isto se presta o Teorema das Aplicações Implícitas e as formas locais. Está presente uma importante estrutura — a diferenciabilidade — compreensível "localmente" por aproximações lineares. Daqui se parte para a utilização do Cálculo em Geometria — a Geometria Diferencial, onde procuramos geodésicas e sua relação com a curvatura dos espaços. Não se pode esquecer do especialíssimo plano de Poincaré e sua geometria, modelo para um tipo de Geometria não Euclidiana.

5 - **Análise Integral**. Envolve-se aqui uma idéia marcante no desenvolvimento científico da humanidade: como informações a nível infinitesimal podem ser agrupadas, ou integradas, de modo a produzir uma informação global. Em Mecânica Clássica, a lei de Newton produz tal informação local, e, em tese, a integração produz o restante. Este fenômeno deve ser bem exposto ao estudante, até um nível em que o mesmo perceba a impossibilidade de se integrar tudo, e daí a necessidade de outros métodos. Por exemplo, podemos integrar muitas equações diferenciais a uma variável — variáveis separáveis, fatores integrantes etc. Obtém-se destreza computacional e prepara-se o espírito para teoremas como os de Picard e Poincaré-Bendixon.
Por outro lado, a integração não se restringe a funções definidas em abertos de espaços euclidianos. Os matemáticos integram também ao longo de curvas, superfícies e variedades certos objetos apropriados — as formas diferenciais. Parece-me óbvio que os Teoremas de Gauss, Green e Stokes, nas suas versões clássicas, precisam ser bem compreendidos, se possível em conjunto com problemas de Eletromagnetismo. Em especial, as várias versões do Teorema de Green se usam no estudo da equação de Poisson no plano. Entretanto, parece-me também conveniente que o estudante, armado das noções básicas de Álgebra Exterior, se convença de que se trata de um único teorema — o teorema de Stokes. Estamos agora a um passo de trabalhar em questões cujo entendimento relaciona-se ao ambiente em que elas se colocam. Outra estrutura matemática se impõe: a Topologia. Aparece um ponto de confluência da Análise, Geometria e Topologia: o Teorema de Gauss-Bonnet.

6 - **Integral de Lebesgue**. O ítem anterior praticamente leva-nos ao livro que originou este artigo. Entretanto, quebrarei por um instante a seqüência para encaixar em nossa lista uma boa introdução à Integral de Lebesgue na reta, teoria esta que é uma das conquistas da Matemática no século 20. O futuro matemático, ou professor, precisa conhecer as respostas a questões tão primitivas quanto: uma curva retificável é também derivável? Quando vale o teorema fundamental do Cálculo? Como se comporta a integral face a passagens ao limite?

Muito bem, chegamos finalmente ao ponto de analisar em que pontos o livro do Prof. Elon Lima toca nossa lista. O leitor suspeitará que a nossa opinião depende do quanto o livro se harmoniza com algumas das idéias anteriores; de fato, outros leitores suspeitarão — sem estar longe da verdade — que esta dependência funciona também no sentido inverso.

O Curso de Análise, vol. 2, cuja primeira edição de 3000 exemplares (1981) encontra-se esgotada — para orgulho do autor — teve seu embrião no enxutíssimo "Análise no Espaço $\mathbb{R}^n$" do mesmo autor, o qual marcou indelevelmente o Mestrado em Matemática do IMPA e um punhado de matemáticos formados nesta instituição (por exemplo, as exposições do Teorema das Aplicações Implícitas e das formas locais foram uma completa inovação em termos brasileiros. Quem se esquece daqueles desenhos acompanhando o texto?). Muita coisa mudou; além da próxima edição do Curso de Análise estar recheada por desenhos de computador, pula-se da extrema economia verbal para o oposto, de 97 para 547 páginas. Permanece o caráter ambicioso do texto, visando o estudante ambicioso e ávido por novidades. Se procuramos o mínimo, teremos dificuldades em utilizá-lo adequadamente, pela profusão de temas interligados e a profundidade da exposição. Examinemos sucintamente seu conteúdo.

O capítulo de abertura cobre seletamente as características topológicas do espaço euclidiano (topologia e convergência, compacidade e conexão). Os três seguintes (Caminhos no espaço euclidiano, Funções Reais de n variáveis — incluindo uma demonstração simples do Teorema das Funções Implícitas — e Integrais Curvilíneas), mais o capítulo sobre Integrais Múltiplas (excetuando a fórmula de mudança de variáveis) são de nível bastante adequado ao bacharelado.

A alma do livro encontra-se nos capítulo sobre Aplicações Diferenciáveis e Integral de Superfícies, que exigem sobremaneira do leitor (mesmo com o estilo algo paternalista do autor, avançando em passos infinitesimais). Neles se desvenda a intimidade das uniões Álgebra Linear — Diferenciação de Aplicações e Álgebra Exterior — Integração de Formas Diferenciais. [A propósito, observa-se que o autor cuidou-se muito bem na introdução à Álgebra Exte rior, transferindo o trabalho relativo à Álgebra Linear a outros textos. Os estudantes ficam perplexos com o jogo linearidade – não linearidade disputado na seção Teorema das Aplicações Implíticas e suas conseqüências. Desconfiam (sem motivos?) de seu conhecimento de Álgebra Linear]. Como recompensa pela leitura destes capítulos, além do profundo conhecimento matemático adquirido, o estudante terá à sua disposição um número considerável de tópicos atraentes (as novidades!). Por exemplo:

- Demonstração do Teorema da Aplicação Inversa utilizando-se o teorema do ponto fixo para contrações. Podem se dar provas mais simples, porém esta se generaliza a espaços de Banach, além do que teoremas de pontos fixos são objetos avidamente procurados em Matemática (a propósito, o mesmo teorema de ponto fixo será reencontrado na prova do Teorema de Picard sobre existência de soluções de equações diferenciais ordinárias). Eu colocaria apenas um reparo: os enunciados envolvendo aplicações fortemente diferenciáveis, ao invés de aplicações de classe C^1, mais freqüentes. O Lema de Morse como exemplo da utilização do Teorema da Aplicação Inversa é um belo achado.

- Discussão sobre superfícies no espaço euclidiano. Por que os cursos de Geometria Diferencial não transferem ao curso de Análise o ônus de introduzir o assunto, liberando-se para trabalhar outros tópicos?

- Mais interessante, o estudante pode apreciar a Topologia em ação, como no Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e aplicações do Teorema de Stokes: teorema de Poincaré (singularidades de campos de vetores em esferas, grau de aplicações diferenciáveis, integral de Kronecker, característica de Euler de superfícies e singularidades de campos de vetores. O conceito de homotopia e sua relação com as integrais curvilíneas (inclusive com aplicação à Análise Complexa) aparece cedo no livro; este mesmo conceito retorna no tópico sobre grau das aplicações diferenciáveis e na integral de Kronecker.

- Introdução à Topologia Algébrica, com as definições dos grupos de cohomologia de variedades, e o lema de Poincaré.

Os ítens 4 e 5 da nossa lista anterior são fartamente cobertos, o que exige do usuário uma prévia definição de seus interesses e férrea disciplina para esgueirar-se no labirinto de possibilidades (e de detalhes!). O texto é um desafio para estudantes e seus professores, mas enfrentá-lo produz sólida formação e revela a sua excelência.