

# TÓPICOS PARA SEMINÁRIOS

*Iniciamos neste número esta seção destinada a publicar matéria particularmente apropriada para discussões em seminários ou grupos de estudos.*

---

## DUAS NOVAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE JORDAN-BROUWER NO CASO DIFERENCIÁVEL

*Elon Lages Lima*

### 1. Introdução

O Teorema de Jordan-Brouwer diz que se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma hiperfície (superfície de dimensão  $n-1$ ) conexa e compacta então  $\mathbb{R}^n - M = A \cup B$  é a reunião de dois abertos conexos disjuntos que têm  $M$  como fronteira comum. Isto vale para hiperfícies de classe  $C^k$ ,  $k \geq 0$ , e a melhor demonstração do caso  $C^0$  se baseia na sequência de Mayer-Vietoris, um instrumento clássico da Teoria da Homologia. [Veja Spanier (1969), pag. 198]. Neste trabalho, daremos duas demonstrações elementares deste importante teorema, supondo  $M$  diferenciável. Os argumentos que empregamos fazem uso de resultados bem conhecidos, a nível, por exemplo, do nosso Curso de Análise [Lima (1985)].

Quando  $n = 2$ , o Teorema de Jordan-Brouwer reduz-se ao "Teorema da Curva de Jordan", demonstrado por Camille Jordan em 1887, na primeira edição do seu famoso "Cours d'Analyse". [Veja Jordan (1959), pags. 91-99.] L.E.J. Brouwer (1910) deu uma elegante demonstração do Teorema de Jordan e pouco depois (1912) provou o caso geral acima enunciado. Uma análise bem sucedida dos argumentos de Brouwer permitiu a J.W. Alexander (1920) reformular e simplificar a prova do Teorema de Jordan usando métodos de homologia e posteriormente (1922), num trabalho notável, demonstrar o chamado "Teorema de Dualidade de Alexander", segundo o qual (em linguagem atual) a cohomologia de um conjunto compacto  $K$  da esfera  $S^n$  determina a homologia do seu complemento  $S^n - K$ . O Teorema de Jordan-Brouwer torna-se então um caso particular, no qual se conside

ra apenas a homologia de dimensão zero de  $S^{n-k}$ . (No Teorema de Jordan-Brouwer, é indiferente considerar a hipersuperfície  $M$  contida no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  ou na esfera  $S^n = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ .)

Hoje em dia é bastante difundida a versão de que a demonstração original de Jordan estava errada e que o primeiro a demonstrar corretamente o Teorema da Curva de Jordan foi O. Veblen. [Veja, por exemplo M. Newman (1954), pag. 205, R. Courant e H. Robbins (1941) pag. 245, M. Kline (1972) pag. 1017.] Isto se deve a alegações de Veblen (1905), corroboradas por notas de rodapé nos artigos de Alexander acima citados. Na realidade, porém, o único defeito explicitamente apontado por Veblen é que Jordan admitiu seu teorema como válido para polígonos. Ora, por um lado, o Teorema da Curva de Jordan para polígonos planos é um exercício a nível de graduação. (Decomponha o polígono em triângulos e use indução no número de triângulos.) E, por outro lado, a demonstração de Veblen no caso de um polígono era incorreta, segundo foi apontado por H. Hahn (1908) e reconhecido pelo próprio Veblen (1913).

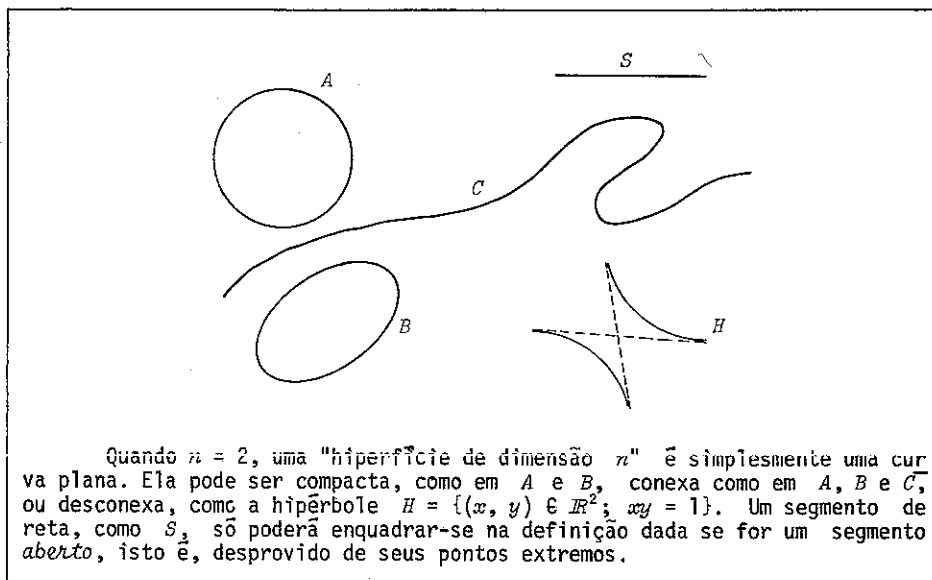
## 2. Hipersuperfícies diferenciáveis

Para facilitar o entendimento, introduziremos a seguir algumas noções básicas sobre hipersuperfícies, em particular o importante conceito de vizinhança tubular, cuja existência é demonstrada no Teorema 1.

Um subconjunto  $M \subset \mathbb{R}^n$  chama-se uma *hipersuperfície* de classe  $C^k$  quando pode ser recoberto por abertos  $U \subset \mathbb{R}^n$  tais que  $U \cap M$  é o gráfico de uma função  $\xi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^k$  no aberto  $U_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Mais precisamente, existe um inteiro  $i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , tal que  $x \in U \cap M$  se, e somente se,  $x_i = \xi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ .

Nestas condições, a aplicação  $\xi: U_0 \rightarrow U \cap M$ , de classe  $C^k$ , dada por

$$\phi(u_1, \dots, u_{n-1}) = (u_1, \dots, u_{i-1}, \xi(u_1, \dots, u_{n-1}), u_i, \dots, u_{n-1}),$$



Quando  $n = 2$ , uma "hiperfície de dimensão  $n$ " é simplesmente uma curva plana. Ela pode ser compacta, como em  $A$  e  $B$ , conexa como em  $A$ ,  $B$  e  $C$ , ou desconexa, como a hipérbole  $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy = 1\}$ . Um segmento de reta, como  $S$ , só poderá enquadrar-se na definição dada se for um segmento aberto, isto é, desprovido de seus pontos extremos.

é um homeomorfismo de  $U_0$  sobre  $U \cap M$ , chamado uma *parametrização* de classe  $C^k$ . Uma aplicação  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^p$  diz-se de classe  $C^p$  ( $p \leq k$ ) quando, para cada parametrização  $\phi: U_0 \rightarrow U \cap M$  de classe  $C^k$ , tem-se  $f \circ \phi: U_0 \rightarrow \mathbb{R}^p$  de classe  $C^p$ .

Se  $M \subset \mathbb{R}^n$  é uma hiperfície de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) então, para cada ponto  $x \in M$ , o conjunto  $T_x M$  dos vetores-velocidade  $w = \lambda'(0)$  dos caminhos diferenciáveis  $\lambda: (-\delta, \delta) \rightarrow M$  com  $\lambda(0) = x$  constitui um subespaço vetorial de dimensão  $n-1$  de  $\mathbb{R}^n$ , chamado o *espaço vetorial tangente* a  $M$  no ponto  $x$ . Para cada parametrização  $\phi: U_0 \rightarrow U \cap M$ , de classe  $C^k$ , com  $x = \phi(u_0) \in U$ , tem-se  $T_x M = \phi'(u_0) \cdot \mathbb{R}^{n-1} =$  imagem da transformação linear  $\phi'(u_0): \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Um vetor  $v \in \mathbb{R}^n$  diz-se *normal* à hiperfície  $M$  no ponto  $x \in M$  quando  $v \perp T_x M$ , isto é,  $\langle v, w \rangle = 0$  para todo  $w \in T_x M$ .

Uma hiperfície  $M \subset \mathbb{R}^n$  diz-se *orientável* quando existe um campo contínuo de vetores normais não nulos  $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ou seja,  $v(x) \neq 0$  e  $v(x) \perp T_x M$  para todo  $x \in M$ .

Por exemplo, se  $M = f^{-1}(c)$  é a imagem inversa de um valor regular<sup>(\*)</sup>  $c \in \mathbb{R}$  por uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  então  $M$  é uma hiperfície orientável de classe  $C^k$  pois  $\text{grad } f: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo contínuo de vetores não nulos, normais a  $M$ . [Para mais detalhes, ver Lima (1985), pag. 168.]

Em particular, a esfera unitária  $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$  é uma hiperfície orientável pois  $S^{n-1} = f^{-1}(1)$  onde  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por  $f(x) = \langle x, x \rangle = x_1^2 + \dots + x_n^2$  e, evidentemente,  $f(x) = 1 \implies \implies \text{grad } f(x) = 2x \neq 0$ .

O exemplo mais conhecido de uma hiperfície não orientável é a faixa de Moebius em  $\mathbb{R}^3$  (desprovida de bordo, para enquadrar-se na definição de hiperfície!).

Uma hiperfície  $M \subset \mathbb{R}^3$  chama-se simplesmente uma *superfície*. Quando  $M \subset \mathbb{R}^2$ , diz-se que  $M$  é uma *curva*.

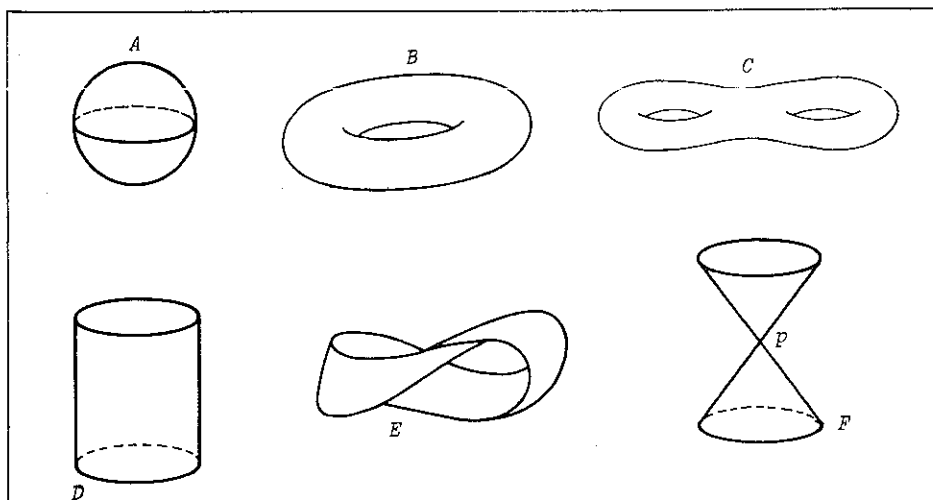
Em qualquer hiperfície  $M \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ) é possível definir localmente campos de classe  $C^{k-1}$  de vetores não nulos, normais a  $M$ . Basta considerar um aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  como na definição, definir uma função  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^k$ , pondo  $f(x) = \xi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \cdot x_i$ , e tomar  $v = \text{grad } f: U \cap M \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então  $0 \in \mathbb{R}$  é valor regular de  $f$  e  $U \cap M = f^{-1}(0)$ , logo  $0 \neq \text{grad } f(x) \perp T_x M$  para todo  $x \in U \cap M$ .

Se  $v$  é um campo  $C^n$  de vetores normais não nulos na superfície  $M$  então  $w = v/|v|$  tem as mesmas propriedades e, além disso,  $|w(x)| = 1$  para todo  $x \in M$ . Logo, não há perda de generalidade em supor unitários os vetores de um campo normal que nunca se anula. Isto simplifica as coisas pois em cada ponto da hiperfície há apenas dois vetores unitários normais. O problema de saber se  $M$  é ou não orientável reduz-se a poder ou não escolher continuamente em cada ponto de  $M$  um desses dois vetores. Quando  $M$  é de classe  $C^k$  todo campo contínuo de vetores unitários normais  $v: M \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^{k-1}$  pois deve coincidir localmente com

(\*) Dizer que  $c$  é valor regular de  $f$  significa afirmar que  $\text{grad } f(x) \neq 0$  para todo  $x \in U$  tal que  $f(x) = c$ .

um dos campos  $\pm \text{grad } f / |\text{grad } f|$  onde a função  $f$ , acima considerada, é de classe  $C^k$ .

Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície de classe  $C^k$  ( $k \geq 1$ ). Dado  $x \in M$ , seja  $w$  um dos dois vetores unitários normais a  $M$  no ponto  $x$ . Para todo  $r > 0$ , o conjunto  $J(x; r) = \{x + tw; -r < t < r\}$  será chamado o segmento aberto de centro  $x$  e raio  $r$ , normal a  $M$ . Analogamente, seu fecho  $J[x; r]$  será chamado o segmento fechado de centro  $x$  e raio  $r$ , normal a  $M$ . Evidentemente,  $J(x; r)$  e  $J[x; r]$  não dependem da escolha feita entre  $w$  e  $-w$ .



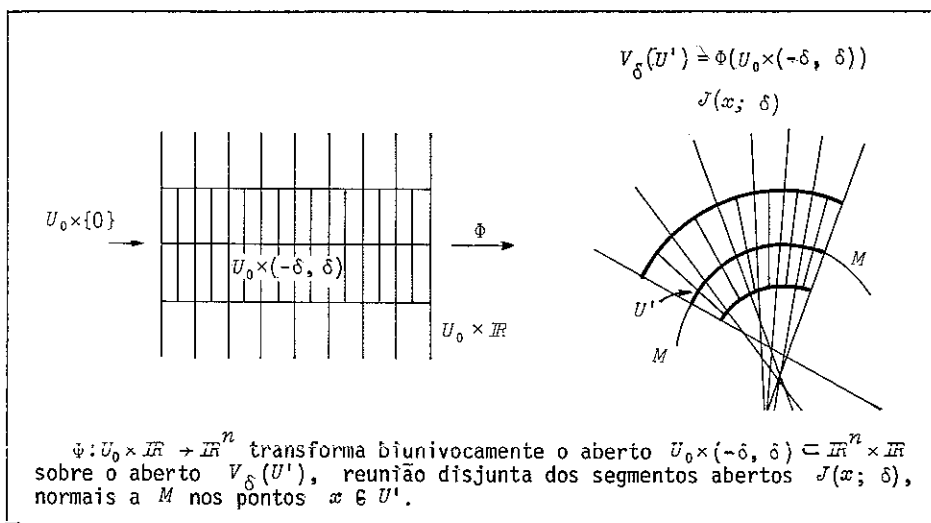
A esfera  $A$ , o toro  $B$ , o bitoro  $C$ , o cilindro  $D$  e a faixa de Moebius  $E$  são hipersuperfícies (isto é, superfícies) em  $\mathbb{R}^3$ . As três primeiras são compactas. Se incluirmos os pontos do bordo no cilindro e na faixa de Moebius, teremos dois conjuntos compactos, mas não serão hipersuperfícies pois não se enquadram na definição dada. Note que a função que ocorre na definição deveria ter por domínio um subconjunto aberto do plano. Ao tentarmos cobrir uma parte do bordo (do cilindro ou da faixa) com um aberto  $U \subset \mathbb{R}^3$  veremos que  $U \subset M$  só pode ser gráfico de uma função de finita num aberto de um semi-plano fechado; nunca de um aberto do plano. O cilindro  $D$  poderia ser estendido indefinidamente nos dois sentidos e então teríamos uma superfície em  $\mathbb{R}^3$  que é um conjunto fechado, porém não compacto. Já com a faixa de Moebius não podemos fazer o mesmo pois o Corolário 1 do Teorema 4, a seguir, diz que toda superfície que seja um subconjunto fechado em  $\mathbb{R}^3$  deve ser orientável. Finalmente, a figura  $F$  mostra um cone duplo, que não se enquadra na definição dada pois nenhuma vizinhança do ponto  $p$  pode ser parametrizada.

O lema seguinte é a forma local da existência de vizinhança tubular.

**Lema 1.** Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ). Para cada  $p \in M$  existem um número real  $\delta > 0$  e uma vizinhança aberta  $U' \ni p$  em  $M$  tais que:

- 1)  $J(x; \delta) \cap J(y; \delta) = \emptyset$  para quaisquer  $x \neq y$  em  $U'$ ;
- 2) O conjunto  $V_\delta(U') = \bigcup_{x \in U'} J(x; \delta)$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ ;
- 3)  $V_\delta(U') \cap M = U'$ ;
- 4) A aplicação  $\pi: V_\delta(U') \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ , que projeta cada segmento normal  $J(x; \delta)$  no ponto  $x \in U'$ , é de classe  $C^{k-1}$ .

**Demonstração.** Seja  $\phi: U_0 \rightarrow U' = U \cap M$  uma parametrização de classe  $C^k$ , com  $p = \phi(u_0)$ . Em  $U'$  podemos definir um campo de vetores normais unitários  $w: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^{k-1}$ . A parametrização  $\phi$  estende-se a uma aplicação  $\Phi: U_0 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^{k-1}$ , dada por  $\Phi(u, t) = \phi(u) + t \cdot w(\phi(u))$ , a qual transforma isometricamente cada segmento vertical  $u \times (-r, r)$  no segmento normal  $J(x; r)$ ,  $x = \phi(u)$ . Para cada  $u \in U_0$ , a derivada  $\Phi'(u, 0): \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é sobrejetiva (logo, um isomorfismo) pois sua imagem contém o espaço vetorial tangente  $T_x M = \phi'(u) \cdot \mathbb{R}^{n-1} = \phi'(u, 0) \cdot (\mathbb{R}^{n-1} \times 0)$ ,  $x = \phi(u)$ , e também o vetor normal  $w(x) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(u, 0)$ . Pelo Teorema da Aplicação Inversa, existe  $\delta > 0$  tal que, restringindo o aberto  $U_0 \ni u_0$  (e conseqüentemente  $U' = \phi(U_0)$ ), a aplicação  $\Phi: U_0 \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um difeomorfismo de classe  $C^{k-1}$  sobre um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . A injetividade de  $\Phi$  em  $U_0 \times (-\delta, \delta)$  mostra que os segmentos normais  $J(x; \delta) = \Phi(u \times (-\delta, \delta))$ ,  $x = \phi(u) \in U'$ , são dois a dois disjuntos. Isto prova a afirmação 1). Quanto a 2), basta observar que  $V_\delta(U')$  é a imagem de  $U_0 \times (-\delta, \delta)$  pelo difeomorfismo  $\Phi$ . Para provar 3), e para uso posterior, notemos que todo aberto  $A \subset \mathbb{R}^n$  que contenha  $p$  deverá conter um conjunto da forma  $V_\lambda(U'')$  com  $U'' \ni p$  aberto em  $M$  e  $\lambda > 0$ .



Basta pôr  $U'' = \phi(B)$ , onde  $B = B(u_0; r) \subset U_0$  e  $0 < \lambda < \delta$  são tais que  $\phi(B \times (-\lambda, \lambda)) \subset A$ . Para que valha 3), seremos obrigados a restringir  $U'$  e  $\delta$ , do seguinte modo. O aberto  $U' \subset M$  se escreve como  $U' = A \cap M$ , onde  $A$  é aberto em  $\mathbb{R}^m$ . Tomamos então  $U'' \ni p$  e  $\lambda > 0$ , do modo acima, com  $V_\lambda(U'') \subset A$ . Daí resulta que  $V_\lambda(U'') \cap M \subset A \cap M = U'$ . Mas se  $x' \in U'$  pertence a  $V_\lambda(U'')$  então  $x' \in J(x''; \lambda)$  para algum  $x'' \in U''$ . Logo os segmentos normais  $J(x'; \lambda)$  e  $J(x''; \lambda)$ , contidos em  $V_\delta(U')$ , têm o ponto  $x'$  em comum. Isto implica  $x' = x''$ , donde  $x' \in U''$ . Assim  $V_\lambda(U'') \cap M = U'$ . Mudando a notação, escreveremos  $V_\delta(U') \cap M = U'$ . Finalmente, se indicarmos com  $\tilde{\pi}: U_0 \times (-\delta, \delta) \rightarrow U_0$  a projeção na primeira coordenada, teremos  $\pi = \phi \circ \tilde{\pi} \circ \Phi^{-1}: V_\delta(U') \rightarrow U' \subset \mathbb{R}^n$ , logo  $\pi \in C^{k-1}$ .

**Teorema 1.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ). Existe uma função positiva  $\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^k$ , tal que*

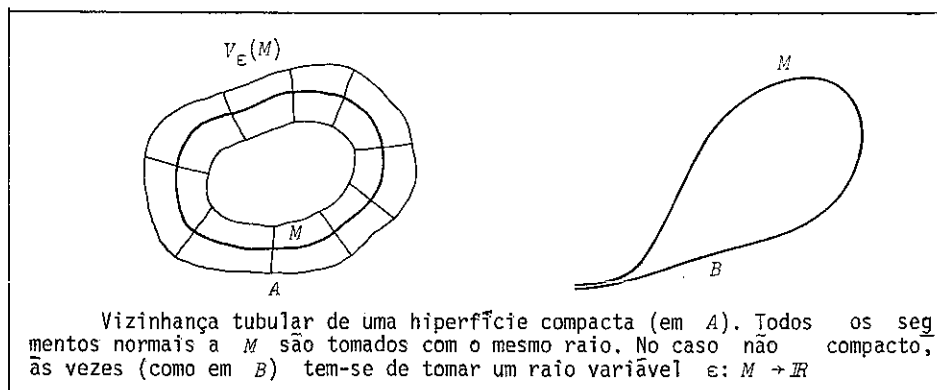
- 1) *Para quaisquer  $x \neq y$  em  $M$ , os segmentos normais  $J(x; \varepsilon(x))$  e  $J(y; \varepsilon(y))$  são disjuntos:*

- 2) O conjunto  $V_\varepsilon(M) = \bigcup_{x \in M} J(x; \varepsilon(x))$  é aberto em  $\mathbb{R}^n$ ;
- 3) A aplicação  $\pi: V_\varepsilon(M) \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ , que transforma cada segmento normal  $J(x, \varepsilon(x))$  no seu centro  $x$ , é de classe  $C^{k-1}$ .

**Demonstração:** Para cada  $p \in M$ , seja  $V_\delta(U')$  como no Lema 1. Existe  $r > 0$  tal que  $B(p; 3r) \subset V_\delta(U')$ . Como foi observado durante a demonstração do Lema 1, existem  $U'' = U''_p$  aberto em  $M$ , contendo  $p$ , e  $\lambda > 0$  tais que  $V_\lambda(U'') \subset B(p; r)$ . Então, quaisquer que sejam  $y \in V_\lambda(U'')$  e  $z \notin V_\delta(U')$  tem-se  $|y-z| \geq 2r$  e  $|y-\pi(y)| < 2r$ , logo  $|y-\pi(y)| < |y-z|$ . Portanto, para todo  $y \in V_\lambda(U'')$ , temos  $\text{dist}(y, M) = \text{dist}(y, M \cap V_\delta(U')) = \text{dist}(y, U')$ . Ora, como toda hipersuperfície é localmente compacta, não há perda de generalidade em supor que o fecho  $\bar{U}'$  é um conjunto compacto, contido em  $M$ . Assim sendo, teremos  $\text{dist}(y, U') = |y-q|$ ,  $q \in \bar{U}'$ . Devemos ter  $q \in V_\delta(U')$  pois do contrário seria  $|y-\pi(y)| < |y-q|$ . Como  $V_\delta(U') \cap M = U'$ , temos  $q \in U'$ . Ora, uma aplicação conhecida do método do multiplicador de Lagrange [veja Lima (1985), pag. 172] diz que se  $|y-q|$  é a menor distância do ponto  $y$  à hipersuperfície  $M$  então  $(y-q) \perp T_q M$ . Como  $|y-q| \leq |y-\pi(y)| < \delta$ , temos  $y \in J(q; \delta)$ . Mas  $y \in J(\pi(y); \delta)$ , portanto  $q = \pi(y)$ . Assim, para cada ponto  $y \in V_\lambda(U'')$ , sua projeção  $\pi(y)$  é o único ponto de  $M$  que torna mínima a distância  $|y-x|$ ,  $x \in M$ . Seja  $V$  a reunião de todos os conjuntos abertos  $V_\lambda(U''_p) \subset \mathbb{R}^n$ , obtidos fazendo variar  $p \in M$ .  $V$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , no qual está definida a aplicação  $\pi: V \rightarrow M$ , dada por  $\pi(z) =$  ponto de  $M$  mais próximo de  $z$ . Em cada aberto  $V_\lambda(U''_p) \subset V$ ,  $\pi$  coincide com a aplicação do item 4 do Lema 1, logo é de classe  $C^{k-1}$ . Se os segmentos normais  $J(x; \alpha)$  e  $J(y; \beta)$  estão contidos em  $V$ , com  $x \neq y$ , então  $J(x; \alpha) \cap J(y; \beta) = \pi^{-1}(x) \cap \pi^{-1}(y) = \emptyset$ . Definamos a função  $\eta: M \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $\eta(x) = \text{dist}(x, \mathbb{R}^n - V)$ . Então  $\eta$  é contínua e positiva. Usando o Teorema de Aproximação de funções contínuas por funções diferenciáveis, (Lima (1985), pag. 445) obtemos  $\varepsilon: M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^k$  tal que  $|\varepsilon(x) - \frac{1}{2} \eta(x)| < \frac{1}{2} \eta(x)$ , o que nos dá  $0 < \varepsilon(x) < \eta(x)$ , para



todo  $x \in M$ . Pondo  $V(M) = \bigcup_{x \in M} J(x; \varepsilon(x))$  vemos que  $V_\varepsilon(M) = \{z \in V; \text{dist}(z, M) < \varepsilon(\pi(z))\}$  logo  $V_\varepsilon(M)$  é um aberto, contido em  $V$ . As afirmações do Teorema 1 seguem-se imediatamente.



O conjunto  $V_\varepsilon(M)$ , definido no Teorema 1, chama-se a *vizinhança tubular de raio  $\varepsilon$*  da hiperfície  $M$ . Ele é um instrumento de grande utilidade em questões de Topologia Diferencial. Quando  $M$  é compacta, a função  $\varepsilon$  assume em  $M$  um ínfimo  $\varepsilon_0 > 0$ . Neste caso podemos tomar uma vizinhança tubular de raio constante, a saber,  $V_{\varepsilon_0}(M) =$  reunião de todos os segmentos normais abertos de raio  $\varepsilon_0$  e centro  $x \in M$ .

Indicaremos ainda com a notação  $V_\varepsilon[M]$  a reunião dos segmentos normais fechados  $J[x; \varepsilon(x)]$ , quando  $x$  varia em  $M$ . Se  $M$  é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $V_\varepsilon[M]$  é também fechado pois é o fecho de  $V_\varepsilon(M)$ .

### 3. Como uma hiperfície de nível separa $\mathbb{R}^n$

No teorema seguinte, a hiperfície  $M$  é necessariamente um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 2.** *Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma hiperfície conexa de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ). Se existir uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ , tal que  $f^{-1}(0) = M$  e  $\text{grad } f(x) \neq 0$  para todo  $x \in M$  então  $\mathbb{R}^n - M = A \cup B$  é a reunião de dois abertos conexos disjuntos, cada um dos quais tendo fronteira igual a  $M$ .*

**Demonstração.** Os conjuntos  $A = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) > 0\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) < 0\}$  são abertos, disjuntos e  $\mathbb{R}^n - M = A \cup B$ . Para provar que  $A$  e  $B$  são conexos, começamos observando que todo conjunto conexo que contenha um ponto de  $A$  e seja disjunto de  $M$  deve estar contido em  $A$  pois a função contínua  $f$  não pode mudar de sinal num conjunto conexo sem anular-se. O campo de vetores  $w: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , dado por  $w(x) = \text{grad } f(x) / |\text{grad } f(x)|$ , é contínuo, unitário e normal a  $M$ . Seja  $V_\varepsilon(M)$  uma vizinhança tubular. O conjunto  $P = \{x + tw(x); x \in M, 0 < t \leq \varepsilon(x)\}$  é conexo pois é imagem de  $M \times (0, 1]$  pela aplicação contínua  $(x, s) \rightarrow x + s\varepsilon(x)w(x)$ . Além disso,  $P$  é disjunto de  $M$  e, como  $\frac{\partial f}{\partial w}(x) > 0$  para todo  $x \in M$ , temos  $x + tw(x) \in A$  se  $t > 0$  é suficientemente pequeno. Segue-se que  $P \subset A$ . Ora, qualquer ponto  $y \in A$ , ou pertence a  $P$  ou pode ser ligado a um ponto  $p \in P$  por um segmento de reta  $[y, p] \subset A$ : basta tomar um ponto  $p$  do conjunto fechado  $V_\varepsilon[M]$  situado a uma distância mínima de  $y$ . (O conjunto conexo  $[y, p]$  contém o ponto  $y \in A$  e é disjunto de  $M$  porque se  $q \in [y, p] \cap M$  teríamos  $q \in V_\varepsilon[M]$  mais próximo de  $y$  do que  $p$ . Assim  $[y, p] \subset A$  o que implica  $p \in P$ .) Por conseguinte,  $A$  é conexo. Analogamente se mostra que  $B$  é conexo. Como toda função contínua  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  anula-se na fronteira do conjunto dos pontos onde é positiva (respectivamente, negativa) segue-se que  $\text{fr.}A \cup \text{fr.}B \subset M$ . Por outro lado, como toda vizinhança de um ponto de  $M$  intersecta ambos os conjuntos  $A, B$ , tem-se  $M \cup \text{fr.}A \cup \text{fr.}B$ . Logo  $M = \text{fr.}A = \text{fr.}B$ .

#### 4. O Teorema de Jordan-Brouwer para hiperfícies orientáveis

Se a hiperfície  $M \subset \mathbb{R}^n$  é um subconjunto fechado do espaço euclidiano então  $M$  é necessariamente orientável. (Nenhum exem

plar da faixa de Moebius, por exemplo,  $\bar{e}$  um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^3$ .) Isto ser $\bar{a}$  provado no par $\bar{a}$ grafo seguinte. Em algumas ocasi $\bar{o}$ es, entretanto, a orientabilidade de  $M$   $\bar{e}$  conhecida a priori, como por exemplo no caso  $M = S^{n-1}$ . Nessas situa $\bar{c}$ o $\bar{e}$ s, a demonstra $\bar{c}$ o $\bar{e}$  do Teorema de Jordan-Brouwer torna-se mais simples, como vere $\bar{m}$ os agora.

Al $\bar{e}$ m da vizinhan $\bar{c}$ a tubular, o instrumento crucial para a prova no caso orient $\bar{a}$ vel  $\bar{e}$  um teorema de C $\bar{a}$ lculo segundo o qual um campo de vetores  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^1$ , dado por  $v(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$   $\bar{e}$  o gradiente de uma fun $\bar{c}$ o $\bar{e}$   $\phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  se, e somente se, cumpre as "condi $\bar{c}$ o $\bar{e}$ s de integrabilidade"  $\partial a_i / \partial x_j = \partial a_j / \partial x_i$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Para a demonstra $\bar{c}$ o $\bar{e}$  deste fa $\bar{c}$ to, veja Lima (1985), pag. 218.

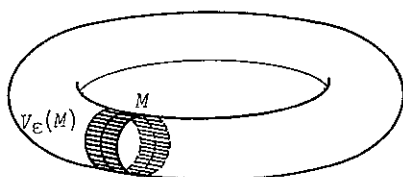
**Teorema 3.** Se a hiperf $\bar{a}$ cie  $M \subset \mathbb{R}^n$ , conexa, orient $\bar{a}$ vel,  $C^\infty$   $\bar{e}$  um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$  ent $\bar{a}$ o existe uma fun $\bar{c}$ o $\bar{e}$   $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , tal que  $M = f^{-1}(0)$  e  $\text{grad } f(x) \neq 0$  para todo  $x \in M$ .

**Demonstra $\bar{c}$ o $\bar{e}$ :** [Lima (1986 a)]. Seja  $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma fun $\bar{c}$ o $\bar{e}$   $C^\infty$  tal que  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda'(t) > 0$  quando  $-1 < t < 1$ ,  $\lambda(t) = 1$  se  $t \geq 1$  e  $\lambda(t) = -1$  se  $t \leq -1$ . Em seguida, seja  $V_{2\epsilon}(M)$  uma vizinhan $\bar{c}$ a tubular de  $M$ . Fixando de uma vez por todas um campo cont $\bar{i}$ nua (portanto  $C^\infty$ ) de vetores unit $\bar{a}$ rios normais  $w: M \rightarrow \mathbb{R}^n$ , os pontos de  $V_{2\epsilon}(M)$  se escrevem, de modo  $\bar{u}$ nico, como  $y = x + tw(x)$ , com  $x = \pi(y) \in M$  e  $|t| < 2\epsilon$ . Definamos uma fun $\bar{c}$ o $\bar{e}$   $g: V_{2\epsilon}(M) \rightarrow \mathbb{R}$  pondo  $g(y) = \lambda(t/\epsilon(x))$  para cada  $y = x + tw(x)$ . Como  $x = \pi(y)$  e  $t = \langle w(\pi(y)), y - \pi(y) \rangle$ , vemos que  $g \in C^\infty$ . Al $\bar{e}$ m disso,  $M = g^{-1}(0)$  e agora mostraremos que  $\text{grad } g(x) \neq 0$  para todo  $x \in M$ . Com efeito, indicando com  $d/dt$  a derivada em rela $\bar{c}$ o $\bar{e}$  a  $t$ , tomamos no ponto  $t = 0$ , temos:

$$\langle \text{grad } g(x), w(x) \rangle = \frac{d}{dt} g(x + tw(x)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} \lambda\left(\frac{t}{\epsilon(x)}\right) \Big|_{t=0} = \frac{\lambda'(0)}{\epsilon(x)} > 0.$$

Temos ainda  $g(x + tw(x)) = 1$  se  $\epsilon(x) \leq t < 2\epsilon(x)$  e  $g(x + tw(x)) = -1$

se  $-2\varepsilon(x) < t \leq -\varepsilon(x)$ . Seja  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  o campo de vetores igual a  $\text{grad } g$  em  $V_{2\varepsilon}(M)$  e igual a zero em  $\mathbb{R}^n - V_\varepsilon[M]$ . Como estes conjuntos são abertos, segue-se que  $v \in C^\infty$ . Evidentemente,  $v$  cumpre as condições de integrabilidade. Logo existe uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (necessariamente  $C^\infty$ ) tal que  $\text{grad } f = v$ . Somando uma constante a  $f$ , se necessário, podemos admitir que  $f(x) = g(x)$  para todo  $x$  em  $V_{2\varepsilon}(M)$  pois neste aberto conexo  $f$  e  $g$  têm o mesmo gradiente. Resta apenas provar que  $f(y) \neq 0$  para todo  $y \notin M$ . Isto é claro se  $y \in V_{2\varepsilon}(M)$ . Se, entretanto,  $y$  não pertence a esta vizinhança tubular, consideremos um ponto  $p$  do conjunto fechado  $V_\varepsilon[M]$  tal que  $|y-p| < |y-z|$  para todo  $z \in V_\varepsilon[M]$ . Evidentemente  $p \notin M$  de modo que  $f(p) \neq 0$ . Além disso, o segmento de reta  $[y, p]$  é disjunto de  $V_\varepsilon(M)$  logo  $v = \text{grad } f$  se anula em todos os pontos deste segmento, donde  $f(y) = f(p)$ . Assim  $f(y) \neq 0$ .



Para tentar compreender como funciona o Teorema 3, no caso  $n=2$ , substituímos o plano  $\mathbb{R}^2$  pela superfície do toro  $T$ . Em  $T$ , consideremos o meridiano  $M$ , que fará o papel da hiperfície. Seja  $V_\varepsilon(M)$  a vizinhança tubular de  $M$  em  $T$ , formada por pequenos arcos de parábolas, de comprimento  $2\varepsilon$  e centro num ponto de  $M$ . Nenhuma função  $g: V_\varepsilon(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , que seja igual a  $\varepsilon$  num dos círculos que formam o bordo de  $V_\varepsilon(M)$  e igual a  $-\varepsilon$  no outro, estende-se continuamente a todo o toro sem anular-se em algum ponto fora de  $M$ . Isto segue-se do conhecido Teorema do Valor Intermediário, pois  $T-M$  é conexo. Neste exemplo, o campo de vetores  $v$ , construído na demonstração do Teorema 3, pode ser definido em  $T$  mas, embora cumpra as condições de integrabilidade, não é gradiente de nenhuma função  $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Corolário.** Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma hiperfície  $C^\infty$  conexa, orientável, que é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ . O complemento  $\mathbb{R}^n - M$  possui duas componentes conexas, as quais têm  $M$  como fronteira comum. (Teorema de Jordan-Brouwer para hiperfícies orientáveis  $C^\infty$ .)

## 5. Outra demonstração do Teorema de Jordan-Brouwer

Neste parágrafo, cuja leitura não depende do anterior, daremos uma demonstração do Teorema de Jordan-Brouwer na qual não suporemos que a hiperfície  $M$  seja orientável. Pelo contrário, a orien-

tabilidade será obtida como consequência de  $M$  ser um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ . Nossa demonstração utiliza um processo de colagem. H. Samelson (1969) deu uma elegante demonstração de orientabilidade de hiperfícies fechadas  $C^\infty$  usando métodos de transversalidade. O princípio em que se baseia a demonstração de Samelson pode ser adaptado para provar o Teorema de Jordan-Brouwer dentro do espírito da Topologia Diferencial. Veja, por exemplo, J.M. Gomes (1981). Acreditamos que nossos argumentos são mais elementares. Na pior hipótese, são diferentes.

Seja  $X$  um espaço topológico. Diremos que duas funções  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  coincidem localmente a menos do sinal quando todo  $x \in X$  tem uma vizinhança  $V$  tal que  $f|_V = \pm g|_V$ . (Escrevemos  $\phi = \pm\psi$  quando as funções reais  $\phi, \psi$  têm o mesmo domínio  $D$  e tem-se  $\phi(y) = \psi(y)$  para todo  $y \in D$ , ou então  $\phi(y) = -\psi(y)$  para todo  $y \in D$ .)

**Lema 2.** *Seja  $X$  um espaço topológico conexo. Se  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  coincidem localmente a menos do sinal e  $f^{-1}(0)$  tem interior vazio então  $f = \pm g$ .*

**Demonstração.** Sejam  $E = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$  e  $U = \text{int} E$ . Para cada  $x \in \bar{U}$ , seja  $V$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $f|_V = \pm g|_V$ . Então  $\text{int}(V \cap U) \neq \emptyset$ , logo existe  $y \in V \cap U$  tal que  $0 \neq f(y) = g(y)$ . Isto mostra que  $f|_V = g|_V$  donde  $x \in U$ . Assim, o conjunto aberto  $U$  é também fechado, logo  $U = X$  ou  $U = \emptyset$ . Isto significa que ou  $f = g$  ou o conjunto  $E$  tem interior vazio. Usando  $-g$  em vez de  $g$ , segue-se que ou  $f = -g$  ou o conjunto  $F = \{x \in X; f(x) = -g(x)\}$  tem interior vazio. Como  $X = E \cup F$ , devemos ter  $f = \pm g$ .

**Observação.** As funções  $f, g$  não precisam ser contínuas. Quando o interior de  $f^{-1}(0)$  não é vazio, é fácil dar exemplos em que  $f$  e  $g$  coincidem localmente a menos do sinal mas  $f \neq g$  e  $f \neq -g$ .

O lema seguinte contém o processo fundamental de colagem.

**Lema 3.** *Seja  $A$  uma cobertura aberta de  $\mathbb{R}^n$ . Para cada  $\alpha \in A$ , seja dada uma função  $f_\alpha: \alpha \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^k$ , com  $\text{int} f_\alpha^{-1}(0) = \emptyset$ . Além disso, sempre que  $\alpha_1 \cap \alpha_2 \neq \emptyset$ , as funções  $f_{\alpha_1}$  e  $f_{\alpha_2}$  coincidem localmente a menos do sinal.*

cidem localmente a menos do sinal em  $\alpha_1 \cap \alpha_2$ . Nestas condições, existe uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^k$ , tal que, para cada  $\alpha \in A$ ,  $f|_\alpha$  e  $f_\alpha$  coincidem localmente a menos do sinal.

**Demonstração.** Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$  seja  $U = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_p$  uma cobertura do segmento de reta  $[0, x]$  por bolas abertas, onde cada  $B_i$  está contida em algum  $\alpha_i \in A$  e  $B_i \cap B_{i-1} \neq \emptyset$ . Descartando supêrfluas, cada  $B_i$  intersectará  $[0, x]$  e  $B_i \cap B_j = \emptyset$  se  $|i-j| > 1$ . Ponhamos  $f(x) = f_p(x)$ , onde  $f_p$  é a última das funções  $f_i: B_0 \cup \dots \cup B_i \rightarrow \mathbb{R}$  ( $i=0, 1, \dots, p$ ), de classe  $C^k$ , definidas sucessivamente por  $f_i|_{B_i} = \pm f_{\alpha_i}|_{B_i}$ , o sinal sendo escolhido de modo que  $f_i$  coincida com  $f_{i-1}$  no conjunto conexo  $B_i \cap B_{i-1}$ . Fixemos  $f$  de uma vez por todas. Se  $g_s: V \rightarrow \mathbb{R}$  for construída como  $f_p$  porém a partir de outra cobertura  $V = B_0 \cup B_1 \cup \dots \cup B_s \supset [0, x]$  então  $V \cap U$  é conexo. Como  $f_0 = g_0$ , segue-se do Lema que  $f_p = g_s$  em  $V \cap U$ . Portanto  $f_p(x) = g_s(x)$ , de modo que a função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definida. Seja agora  $2\varepsilon = \text{dist}([0, x], \mathbb{R}^n - U)$ . Se  $y \in B(x; \varepsilon)$  e  $W = B_0 \cup B_t \cup \dots \cup B_t \supset [0, y]$ , onde cada  $B_i$  tem raio  $\varepsilon$  e centro sobre  $[0, y]$ , então  $W \subset U$ . Pelo Lema 2, a função  $h_t: W \rightarrow \mathbb{R}$ , definida como acima, coincide com  $f_p|_W$ , logo  $f(y) = h_t(y) = f_p(y)$ . Isto significa que  $f$  coincide com  $f_p$  na bola  $B(x; \varepsilon)$ , logo  $f \in C^k$ .

**Teorema 4** [Lima (1986 b)]. Seja  $M \subset \mathbb{R}^n$  uma hipersuperfície de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ) que é um subconjunto fechado do espaço euclidiano. Existe uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^{k-1}$ , tal que  $M = f^{-1}(0)$  e  $\text{grad } f(x) \neq 0$  para todo  $x \in M$ .

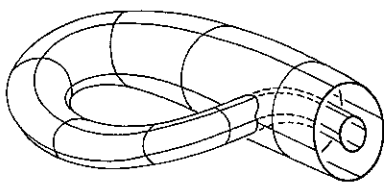
**Demonstração:** Seja  $\lambda: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função  $C^\infty$  tal que  $\lambda(t) = -1$  se  $t \leq -1$ ,  $\lambda'(t) > 0$  se  $-1 < t < 1$ ,  $\lambda(0) = 0$  e  $\lambda(-t) = -\lambda(t)$ . Seja  $V_{2\varepsilon}(M)$  uma vizinhança tubular de  $M$ . A fim de aplicar o Lema 3, cubramos o espaço  $\mathbb{R}^n$  com os seguintes conjuntos abertos  $\alpha$ . Um deles é  $\alpha^* = \mathbb{R}^n - V_\varepsilon[M]$ . Para obter os outros, cubramos  $M$  com abertos  $U' \subset M$ , em cada um dos quais está definido um campo contínuo (logo  $C^{k-1}$ ) de vetores normais unitários  $w: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Para cada  $U'$  seja  $\alpha = V_{2\varepsilon}(U') =$

$= \{x + tw(x); x \in U', |t| < 2\varepsilon(x)\}$ . A função  $f_\alpha: \alpha \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f_\alpha(x + tw(x)) = \lambda(t/\varepsilon(x))$ , é de classe  $C^{k-1}$ . Ponhamos ainda  $f_{\alpha^*}: \alpha^* \rightarrow \mathbb{R}$  constante, igual a 1. As hipóteses do Lema 3 são facilmente verificadas, o que nos dá uma função  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^{k-1}$ , com  $f^{-1}(0) = M$  e  $\text{grad } f(x) = \frac{\lambda'(0)}{\varepsilon(x)} \cdot w(x)$  para todo  $x \in M$ , logo  $\text{grad } f(x) \neq 0$ .

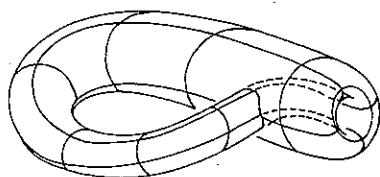
**Corolário 1.** Toda hiperfície  $M \subset \mathbb{R}^n$  de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ), que é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$ , é orientável.

**Corolário 2.** Se a hiperfície  $M \subset \mathbb{R}^n$ , de classe  $C^k$  ( $k \geq 2$ ), é um subconjunto fechado de  $\mathbb{R}^n$  então  $\mathbb{R}^n - M$  possui duas componentes conexas, cada uma das quais tem  $M$  como fronteira. (Teorema de Jordan-Brouwer diferenciável.)

**Observação.** Os mesmos argumentos se aplicam se  $M$  é uma hiperfície fechada de uma superfície simplesmente conexa  $N$ .



Fase intermediária da construção da garrafa de Klein



A garrafa de Klein em  $\mathbb{R}^3$ : fase final

As figuras acima, reproduzidas do livro "Geometry and Imagination, por D. Hilbert e Cohn-Vossen (pag. 308), ilustram como se obtém uma imagem em  $\mathbb{R}^3$  da superfície conhecida como "a garrafa de Klein". Esta superfície pode ser mergulhada em  $\mathbb{R}^4$  mas, sendo não-orientável e compacta, qualquer representação dela em  $\mathbb{R}^3$  deverá possuir auto-penetrações, logo não será uma "hiperfície" no sentido da nossa definição. Com efeito, todo subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^3$  é fechado e uma cópia fiel da garrafa de Klein em  $\mathbb{R}^3$  violaria o Corolário 1 do Teorema 4.

## Referências

- [1] J.W. Alexander (1920), *A proof of Jordan's theorem about a simple closed curve*, *Annals of Math.*, 21, pags. 180-184.
- [2] J.W. Alexander (1922), *A proof and extension of the Jordan-Brouwer separation theorem*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 23, pags. 333-349.
- [3] L.E.J. Brouwer (1910), *Beweis des Jordanschen Kurvensatzes*, *Math. Annalen*, vol. 69, pags. 169-175.
- [4] L.E.J. Brouwer (1912), *Beweis des Jordanschen Satzes für  $n$ -dimensionalen Raum*, *Math. Annalen*, vol. 71, pags. 314-319.
- [5] R. Courant - H. Robbins (1941), *What is Mathematics?* Oxford Univ. Press, London-N. York.
- [6] J.M. Gomes (1981), *O teorema de separação de Jordan Brouwer para hipersuperfícies diferenciáveis*, tese de mestrado, IMPA, Rio de Janeiro.
- [7] H. Hahn (1908), *Über die Anordnungssätze der Geometrie*, *Monatshefte für Math. und Phys.* vol. 19, pags. 289-303.
- [8] C. Jordan (1959), *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, 3<sup>ème</sup> edition, nouveau tirage, Gauthier-Villars, Paris.
- [9] M. Kline (1972), *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, London-New York.
- [10] E.L. Lima (1985), *Curso de Análise*, vol. 2, (2<sup>a</sup> edição), Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.
- [11] E.L. Lima (1986 a), *The Jordan-Brouwer separation theorem for smooth hypersurfaces*, a aparecer no *American Mathematical Monthly* em 1986.
- [12] E.L. Lima (1986 b), *Orientability of Smooth Hypersurfaces and the Jordan-Brouwer separation theorem*, a aparecer em *Expositiones Mathematicae*, 1986.
- [13] M.H.A. Newman (1954), *Elements of the Topology of Plane Sets of Points* (2nd edition) Cambridge Univ. Press.
- [14] H. Samelson (1969), *Orientability of Hypersurfaces in  $\mathbb{R}^n$* , *Proc. Am. Math. Soc.* vol. 22, pags. 301-302.
- [15] E.H. Spanier (1969), *Algebraic Topology*, MacGraw-Hill, N. York.



- [6] O. Veblen (1905), *Theory of plane curves in non-metric Analysis Situs*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 6, pags. 89-98.
- [7] O. Veblen (1913), *Decomposition of an  $n$ -space by a polyhedron*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 14, pags. 65-72.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada  
Estrada Dona Castorina 110 - Jardim Botânico  
22.460 Rio de Janeiro, RJ