SEÇÃO DE PROBLEMAS

Problema 2

Definem-se números inteiros $a_n^{(k)}$ para $n \geq 2$ e para $-1 \leq k \leq n$, pelas igualdades:

1. $a_n^{(-1)} = 0$ e $a_n^{(0)} = 1$ para todo $n \geq 2$.
2. $a_2^{(1)} = a_2^{(2)} = 1$.
3. $a_n^{(k)} = a_{n-1}^{(k)} + a_{n-1}^{(k-1)} + a_{n-1}^{(k-2)}$ se $1 \leq k < n$.
4. $a_n^{(n)} = a_{n-1}^{(n-2)}$ para todo $n > 2$.

Obtem-se assim um triângulo de números cujas primeiras linhas são

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\
 & 0 & 1 & 3 & 6 & 6 & 3 \\
0 & 1 & 4 & 10 & 15 & 15 & 6
\end{array}
$$

Provar que para todo primo p verificam-se as congruências

$$a_p^{(1)} \equiv -1 \pmod{p}, \quad a_p^{(k)} \equiv 0 \pmod{p} \text{ se } 1 < k < p \quad \text{e} \quad a_p^{(p)} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Solução de Arnaldo Mandel (IME-USP)

Como os números $a_n^{(k)}$ satisfazem uma recorrência, é razoável atacar o problema por meio de "funções geradoras". Por uma conveniência deste método é bom massagear os $a_n^{(k)}$ introduzindo números $b_{n,k}$, para $n,k \geq 0$, que coincidem com os $a_n^{(k)}$ quando estes estão definidos, e tais que:

i) $b_{n,-1} = 0, \qquad b_{n,0} = 1, \qquad n \geq 0,$

ii) $b_{0,1} = -1, \qquad b_{0,k} = 0, \qquad k \geq 2,$

iii) $b_{n,k} = b_{n-1,k} + b_{n-1,k-1} + b_{n-1,k-2}, \quad n \geq 1, \quad k \geq 1.$

(Exercício: provar que $b_{n,n+j+1} = -b_{n,n-j}$ para $0 \leq j \leq n$ e $b_{n,k} = 0$ para $k > 2n+1$.) Observe que não há condição sobre os $b_{n,k}$ visivelmente correspondendo à condição (4); esta foi absorvida pela definição dos $b_{0,k}$, $k \geq 1$. Agora segue uma manipulação convencional.

Para $n \geq 0$, seja $B_n = \sum_{k\geq 0} b_{n,k}x^k \in \mathbb{Z}[[x]]$ e seja $B \in \mathbb{Z}[[x, y]]$ a série formal

$$B = \sum_{n\geq 0} B_n y^n = \sum_{n,k\geq 0} b_{n,k}x^k y^n.$$

Multiplicando-se a recorrência (iii) por $x^k y^n$ e somando vem que:

(a) $$\sum_{n,k\geq 1} b_{n,k}x^k y^n = \sum_{n,k\geq 1} b_{n-1,k}x^k y^n + \sum_{n,k\geq 1} b_{n-1,k-1}x^k y^n + \sum_{n,k\geq 1} b_{n-1,k-2}\, x^k y^n$$

(estou trabalhando em $\mathbb{Z}[[x, y]]$, portanto não me perturbem com questões de convergência!). Exprimindo as parcelas em função de B e lembrando que $(1-y)^{-1} = \sum_{n\geq 0} y^n$, obtemos

$$\sum_{n,k\geq 1} b_{n,k}x^k y^n = B - \sum_{k\geq 0} b_{k,0}\,x^k - \sum_{n\geq 0} b_{0,n}y^n + b_{0,0} = B + x - (1-y)^{-1},$$

$$\sum_{n,k\geq 1} b_{n-1,k}x^k y^n = y \sum_{n\geq 0,k\geq 1} b_{n,k}x^k y^n = y(B-(1-y)^{-1}),$$

$$\sum_{n,k\geq 1} b_{n-1,k-1}\, x^k y^n = xyB,$$

$$\sum_{n,k\geq 1} b_{n-1,k-2}\, x^k y^n = x^2 y(B + \sum_{n\geq 0} b_{n,-1}y^n) = x^2 yB.$$

De (a) vem:

$$B + x - (1-y)^{-1} = y(B - (1-y)^{-1}) + xyB + x^2 yB;$$

logo,

(b) $$B = (1-x)(1 - (1 + x + x^2)y)^{-1} = \sum_{n\geq 0} (1-x)(1 + x + x^2)^n y^n.$$

Daí segue que $B_n = (1-x)(1+x+x^2)^n$.

Esta expressão permite obter "fórmulas" para os $b_{n,k}$ absolutamente complicadas, e também resolve o exercício proposto. Mas a questão é achar os valores de $b_{p,k}$ (mod p) quando p é primo. Se $\psi\colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_p[x]$ é o morfismo canônico,

$$\psi(B_p) = (1-x)(1+x^p+x^{2p}) = 1 - x + x^p - x^{p+1} + x^{2p} - x^{2p+1},$$

donde

$$b_{p,0} \equiv b_{p,p} \equiv -b_{p,1} \equiv 1 \pmod p \quad \text{e} \quad b_{p,k} \equiv 0 \pmod p, \quad 2 \le k \le p.$$

Uma solução análoga foi enviada por Derek Hacon (PUC/RJ). Outra solução encontra-se em "The Jacobson Radical of the Integral Green Ring of a Cyclic Group of Order p^2", A. Jones and G.O. Michler, J. London Math. Soc. (2) 32(1985) 221-228.

Problemas Propostos

Problema 4

Seja A um conjunto aberto convexo e limitado do plano. Uma reta ℓ desse plano é um eixo de simetria de A se a reflexão sobre ℓ deixar o conjunto A invariante. Prove que se A possui dois ou mais eixos de simetria, todos eles passam por um mesmo ponto.

(proposto por Antonio Luis Pereira)

Problema 5

Seja $A = (a_{ij})$, $1 \le i, j \le n$, uma matriz real tal que $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0$, i.e., a soma de qualquer linha ou coluna se anula. Então todos os cofatores coincidem.

(proposto por Arnaldo Mandel)

Problema 6

a) Seja $B = (b_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$, uma matriz estocástica, i.e., os b_{ij} são números reais positivos e $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1$. Se 1 é o único autovalor de B, então B é a matriz identidade.

b) $B = (b_{ij})$ é duplamente estocástica se $b_{ij} \geq 0$ e $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1$. Se $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = 1$ então existe uma matriz B duplamente estocástica tal que $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de B.

(*proposto por Laura Martignon*)
