Introdução à Teoria Ergódica, por Ricardo Mañé. Projeto Euclides, IMPA, 1984.

Artur Oscar Lopes

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Vamos introduzir idéias de Teoria Ergódica através de um exemplo simples.

Imaginemos uma mesa de bilhar, com a forma apresentada na figura 1, e uma bola que, rolando sem atrito, bata sucessivamente nas paredes laterais desta mesa. Observe que o ângulo de incidência com a tangente à parede da mesa é igual ao ângulo de reflexão, como mostra a figura abaixo.

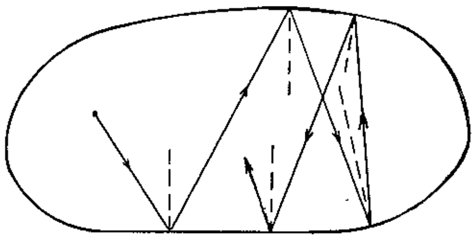

Figura 1

Se desejássemos calcular a trajetória exata da bola, a partir de condições iniciais, enfrentaríamos o seguinte problema: um pequeno erro de aproximação no ângulo de incidência se propagaria, sucessivamente, nas próximas batidas, aumentando o erro de tal forma que, rapidamente, o valor calculado estaria longe da posição real da bola.

Este modelo é uma simplificação do que ocorreria com a molécula de um gás dentro de um recipiente fechado. Suponhamos agora que a bola tenha velocidade muito alta, como ocorre, por exemplo, com as moléculas de um gás. Chegaremos então à conclusão de que a propagação do erro, a que nos referimos no parágrafo anterior, não permitirá que se faça, mesmo para um período de tempo razoavelmente pequeno, uma boa previsão da trajetória exata da bola.

Voltando à situação da análise de um gás dentro de um recipiente fechado, lembramos que a pressão do gás é proporcional à quantidade de moléculas em uma certa região. Desta forma, nos parece natural a seguinte pergunta a respeito da mesa de bilhar: fixada uma região A e um tempo t, qual a porcentagem de tempo total que a bola passou na região A antes de ter-se esgotado o tempo t? O ideal seria que, para toda a região A, existisse um valor limite para esta porcentagem de tempo, quando t é grande.

Este tipo de pergunta, diferentemente do cálculo da trajetória exata da bola, está dentro de uma perspectiva não determinística e, apesar da extrema dificuldade em equacionar tal problema, ele está mais próximo de nos fornecer as informações que são realmente significativas para se entender o modelo de um gás dentro de um recipiente fechado.

O tipo de problema acima colocado é um exemplo de questão onde se utilizam os métodos da Teoria Ergódica. Vamos ser agora um pouco mais formais: o objeto da Teoria Ergódica é o estudo das transformações que preservam medidas.

No exemplo do bilhar, é fácil ver que a trajetória da bola fica determinada pelas sucessivas batidas e ângulos com a fronteira da mesa. Desta forma, se chamamos a fronteira da mesa de S, é natural considerar-se a transformação T que associa a cada $p \in S$ e a cada $\theta \in [0, \pi]$ (θ ângulo de incidência) o próximo ponto de batida, digamos p_1, juntamente com o próximo ângulo de incidência, digamos θ_1. É possível provar que esta transformação preserva uma medida no espaço $S \times [0, \pi]$. Não entraremos aqui em considerações técnicas de como isto é feito, mas gostaríamos apenas de observar que os problemas com bilhares são considerados extremamente difíceis de serem resolvidos.

No caso geral, se X é um espaço munido de uma σ-álgebra σ, diremos que uma aplicação mensurável $T: X \to X$ preserva uma medida finita μ sobre σ se, para qualquer $A \in \sigma$, temos que $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$. Chama-se sistema a quádrupla (X,T,σ,μ).

Consideraremos agora outros exemplos:

1) Seja f um difeomorfismo C^∞ de R^2 em R^2, com jacobiano constante e igual a 1. Sendo assim, pelo teorema de mudança de variável, a área da imagem inversa de um aberto A é igual à área de A. Dizemos, então, que o difeomorfismo f preserva a medida de Lebesgue.

2) O Fluxo Hamiltoniano nos dá um exemplo em que a medida de Lebesgue é preservada pelas trajetórias do sistema.

3) A expansão de um número real em frações contínuas é um problema que pode ser analisado através de uma conveniente aplicação que preserva medida.

Em todos estes sistemas aparece o conceito de órbita de um ponto x pertencente ao espaço X, isto é, o conjunto $\{T^n(x);\, n\in N\}$, onde T^n é definido, indutivamente, por $T^0 = \text{Id}$ e $T^n = T^{n-1}\ T$. Assim, por exemplo, no problema do bilhar, os sucessivos pontos de batida na fronteira juntamente com os respectivos ângulos de incidência, podem ser pensados como uma órbita.

Motivado por problemas de Mecânica Estatística e bilhares, Birkhoff demonstrou o seguinte teorema notável:

Considere que T preserva a medida μ sobre uma σ-álgebra definida no espaço X e que $\phi\colon X \to R$ seja uma aplicação μ-integrável. Então existe um subconjunto de medida zero em X, digamos $Y \subset X$, tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \phi(T^i(x))$$

existe para todo $x \in X-Y$.

Vamos agora interpretar este resultado. O teorema acima nos garante que, a menos de um conjunto insignificante Y (conjunto com medida zero), o valor limite da média da função ϕ ao longo da órbita de x existe para todo ponto em X. Esta afirmação é uma generalização da Lei dos Grande Números que assegura, por exemplo o seguinte: o quociente do número de caras obtidas pelo número de vezes que se joga uma moeda honesta aproxima-se de 0,5, quando jogamos esta moeda um número suficientemente grande de vezes.

Apresentaremos, a seguir, uma aplicação do Teorema de Birkhoff. Seja f um difeomorfismo de R^2 em R^2; e seja ainda, na hipótese do teorema, a aplicação $\phi: R^2 \to R$ tal que $\phi(x) = 1$, se $x \in A$, e $\phi(x) = 0$, se $x \notin A$. Neste caso, para cada $x \in X-Y$, o limite a que se refere o teorema nos dá a freqüência com que a trajetória de x visita a região A, quando o tempo decorrido é muito grande.

Embora esta situação não seja o modelo exato para o da mesa de bilhar, a analogia do exemplo com a pergunta que lá foi levantada é bastante transparente.

Uma exposição geral, sobre Teoria Ergódica, pode ser encontrada no artigo de divulgação "Aspectos Elementares da Teoria Ergódica" por Ricardo Mañé, publicado no Noticiário da SBM — Ano XI — Nº 1 - Maio de 1980 e reproduzido no presente número de *Matemática Universitária*.

Os primeiros livros de Teoria Ergódica foram os de Birkhoff [1], Hopf [6] e Halmos [5]. Estes livros expõem, entre outros tópicos, diferentes formas de teoremas de limites ergódicos. Na época da publicação destes textos, a principal questão em aberto era saber quando dois sistemas são "equivalentes" (o leitor pode encontrar em qualquer livro de Teoria Ergódica a definição formal de equivalência entre sistemas). Nestes livros são utilizados métodos de Análise Funcional que, apesar de alguns resultados interessantes, não foram capazes de detectar invariantes de equivalência. Neles não aparece o conceito fundamental de entropia, que influenciou sobremaneira os desdobramentos subsequentes da teoria.

Durante a Segunda Guerra Mundial, os problemas de comunicação de mensagens em códigos foram extensamente estudados. Em conseqüência destes trabalhos, Shanon [10], introduziu o conceito matemático de entropia na Teoria da Informação. Posteriormente, com ligeiras alterações, Kolmogorov introduziu o conceito de entropia de um sistema e observou que dois sistemas equivalentes possuem a mesma entropia.

A entropia mede, basicamente, o grau de desorganização de um sistema. Quanto maior a entropia de um sistema, maior é a complexidade da sua dinâmica.

Na Teoria Ergódica, um dos teoremas mais importantes é o de Orstein, que afirma que dois shifts de Bernoulli são equivalentes, se e somente se, possuem a mesma entropia [8].

Resultados mais recentes de Bowen e Ruelle [11] relacionam o conceito matemático de entropia de um sistema com o conceito de entropia a que os físicos estão acostumados (no caso do lattice unidimensional). Volta, assim, a Teoria Ergódica a estar associada à Física e às suas raízes históricas, que são a hipótese de Boltzman e o princípio de que a natureza tem a tendência a maximizar a entropia.

O livro de Ricardo Mañé traz uma exposição sistemática dos principais tópicos de Teoria Ergódica, de uma maneira extremamente clara e objetiva. O livro inicia com uma série de exemplos interessantes que são desenvolvidos com detalhes nos capítulos subseqüentes.

Os conhecimentos necessários para a leitura do livro são os resultados básicos da Teoria da Medida e alguns tópicos da Teoria Qualitativa de Equações Diferenciais.

O ponto mais importante do livro, que o torna ímpar entre os demais livros de Teoria Ergódica, é a parte que trata de Teoria Ergódica Diferenciável.

Os resultados de Dinâmica Diferenciável desenvolveram-se, inicialmente, sem grande intersecção com teoria Ergódica. Foi a partir dos trabalhos de Sinai, Bowen e Ruelle, que estes resultados se tornaram parte importante na motivação, entendimento e formulação de várias questões dentro da área que se convencionou chamar de Teoria Ergódica Diferenciável.

Estes trabalhos possibilitaram, por exemplo, novos equacionamentos e soluções para vários problemas de bilhares [2].

Vários resultados, novos e interessantes, têm sido obtidos, nos últimos anos, em Teoria Ergódica Diferenciável; e o autor do livro tem-se se destacado como um dos pesquisadores que mais tem contribuído nesta área.

O texto de Ricardo Mañé apresenta alguns trabalhos recentes, como o Teorema de Oseldet e Pesin e a fórmula que permite estimar a entropia de um Sistema a partir dos números de Liapunov. Tanto quanto se saiba, este é o único livro a apresentar tais tópicos, que se tornaram extremamente importantes em Teoria Ergódica.

Recentemente, vários livros de Teoria Ergódica foram lançados. Dentre eles, destacamos o de Peter Walters [9], que se dedica mais aos aspectos variacionais (Entropia, Pressão Topológica, etc...) e o de I.P. Cornfeld, S.V. Formin e Y.G. Sinai [3], que é bastante completo, apresentando capítulos sobre Fluxos Geodésicos, Bilhares, Probabilidade, etc... Destacamos ainda o livro de N. Martin e J. England [7], que apresenta várias áreas de aplicações, como Teoria da Informação Mecânica Estatística, Probabilidade, etc... E, por fim, salientamos o livro de Fustenberg [4], com aplicações à Teoria dos Números.

Vários destacados pesquisadores na área têm expressado a sua admiração e entusiasmo pelo livro de Ricardo Mañé, principalmente na abordagem bastante acessível e sem formalizações desnecessárias de tópicos bastante sofisticados.

Acreditamos que o texto mencionado irá influenciar as novas gerações de pesquisadores e atrair estudantes para esta área efervescente de pesquisa que é a Teoria Ergódica Diferenciável.

Para concluir, destacamos o fato de que este livro recebeu o prêmio Jabuti de Ciências, em outubro de 1984, como o livro do ano na categoria de Ciências Exatas. A tradução do livro para o inglês deverá ser publicada pela Springer-Verlag, neste ano.

Bibliografia

[1] G.D. Birkhoff - *Dynamical Systems* - Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Vol. IX, 1927.

[2] L.A. Bunimovich - *On the Ergodic Properties of Nowhere Dispersing Billiards*, Comm. in Math. Physics, 65 (1979), 295-312.

[3] I.P. Cornfeld, S.V. Formin e Y.G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer-Verlag.

[4] H. Furstenberg, *Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1981.

[5] P. Halmos, *Lectures on Ergodic Theory*, Chelsea, New York, 1953.

[6] E. Hopf, *Ergodentheorie*, Chelsea, New York, 1937.

[7] N. Martin e J. England, *Mathematical Theory and Entropy*, Addison-Wesley.

[8] D.S. Orstein, *Bernoulli Shifts with the same entropy are isomorphic*, Adv. in Math., 4 (1970) 337-352.

[9] P. Walters, *An introduction to Ergodic Theory*, Springer--Verlag.

[10] C. Shanon, *A Mathematical Theory of Communication*, Bell Sys. Tech. Journal, 27 (1948) 379-423, 623-656.

[11] D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism*, Addison Wesley.