ARTIGOS

Matemática Universitária, Nº 5, Junho de 1987, 9-23.

A Equação do Terceiro Grau

Elon Lages Lima

A crônica da equação do terceiro grau, apresentada a seguir, poderia talvez conter algumas palavras a mais sobre Ludovico Ferrari (1522 + 43 = 1565), que nasceu e morreu em Bolonha mas foi para Milão aos 14 anos a fim de trabalhar na casa de Cardano. Este, reconhecendo a excepcional inteligência do jovem, ensinou-lhe Latim e Matemática, promovendo-o a seu secretário. Aos dezoito anos, Ferrari tornou-se professor da Universidade de Milão e tinha apenas vinte e cinco anos quando de sua disputa com Tartaglia, depois da qual recebeu ofertas de emprego de pessoas importantes, como o imperador Carlos V e o cardeal Gonzaga, de Mantua, a quem serviu durante oito anos. Razões de saúde o levaram de volta a Bolonha, onde morou com sua irmã, foi professor na universidade e morreu aos 43 anos. Sua participação na história que contamos aqui é importante, não apenas por sua colaboração decisiva para o livro "Ars Magna" de Cardano, mas principalmente por ter sido o homem que, ao deduzir a fórmula de resolução por radicais da equação do quarto grau, atingiu o limite do possível.

Com efeito, dois séculos e meio depois, Paolo Ruffini (1765 + 57 = 1822) publicou em Bolonha (1799) um livro no qual demonstrou que a equação geral de grau superior ao quarto não pode ser resolvida por meio de radicais. Independentemente disto, o jovem matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802 + 27 = 1829) pensou ter descoberto, em 1821, uma fórmula que expressava as raízes de uma equação do quinto grau por meio de radicais. Verificou porém que havia um erro em sua demonstração e, retornando ao problema três anos depois, (1824), provou que as equações de grau superior ao quarto não possuem fórmula geral de resolução por radicais. A demonstração de Abel é considerada satisfatória enquanto que na de Ruffini têm sido observadas lacunas. O problema geral de determinar quais equações de grau n têm suas raízes expressas sob forma de radicais em função dos coeficientes só veio ter uma solução definitiva com o trabalho do genial matemático francês Evariste Galois (1811 + 21 = 1832). Este obteve uma condição necessária e suficiente, a saber, que o "grupo de Galois" da equação seja um grupo solúvel. Para entender o que significa isto, veja, por exemplo, o livro "Introdução à Álbegra", por Adilson Gonçalves. (Projeto Euclides, IMPA, 1987, segunda edição.)

Introdução

A história da solução da equação do terceiro grau tem vários aspectos interessantes, em virtude dos quais ela se constitui num tópico atraente para estudo e discussão entre professores e alunos de Matemática.

Um desses aspectos é o enigma histórico. Se os babilônios já sabiam resolver a equação do segundo grau mil e setecentos anos antes da era cristã, por que se teve de esperar mais de três mil anos até que Scipione Ferro resolvesse a equação do terceiro grau e Ludovico Ferrari, logo em seguida, a do quarto grau? Há também o lado humano, as figuras pitorescas e fascinantes dos homens envolvidos nas descobertas e nas disputas daí decorrentes. Além disso, tem-se ainda o aspecto científico, os progressos matemáticos que advieram da solução e o grande problema geral da resolução por radicais, somente elucidado trezentos anos depois, por Ruffini, Abel e Galois. Tudo isto sem falar no cenário, aquela notável atmosfera de elevada excitação intelectual existente na Itália da época renascentista.

A fim de dar ao leitor uma idéia do ambiente em que se desenrolou a saga que vamos relatar, achamos oportuno encerrar esta introdução com dois trechos retirados do livro "Histoire des Sciences Mathématiques en Italie", de G. Libri, Paris, 1840 (págs. 6 e 152 do vol. III).

"Em nossa opinião, como já repetimos tantas vezes, é o caráter, é a energia que faz os grandes homens, e o talento nunca faltou aos povos que sentem e que desejam com todo ardor. Entretanto, uma reunião de homens como Leonardo da Vinci, Machiavel, Colombo, Raphael, Michelângelo, Ariosto, que congregaram plêiades de discípulos ilustres e de rivais, é um fato que nunhuma pesquisa histórica parece poder explicar".

"Os *quesiti* são uma coleção, em nove livros, de respostas dadas por Tartaglia a questões que lhe eram endereçadas por príncipes, monges, doutores, embaixadores, professores, arquitetos, etc. Freqüentemente, essas questões continham problemas do terceiro grau. Ao ver todos esses problemas propostos no começo do século XVI, compreende-se a importância que se atribuía naquela época às descobertas algébricas. Seria difícil achar na história das ciências exemplo de fato semelhante. As apostas, as disputas públicas, os panfletos se sucediam sem interrupção: todas as classes da sociedade se interessavam por essas lutas científicas, do mesmo modo como na antigüidade se interessavam pelos desafios dos poetas e pelos jogos dos atletas. Parecia que se pressentia a descoberta, e a descoberta não se fez esperar".

Evidentemente, nas limitadas dimensões deste artigo não seria possível tratar exaustivamente todos os ângulos acima aludidos do epsódio que vamos narrar. Pocuraremos, entretanto, fazer uma exposição coerente e inteligível, a qual será dividida em três partes: História, Álgebra e Cálculo.

História

Lendo o primeiro capítulo do livro de A. Aaboe "Episódios da História Antiga da Matemática", publicado pela SBM, aprendemos que os matemáticos babilônicos, por volta do ano 1700 AC., já conheciam regras para resolver equações do segundo grau, sob forma de problemas, como o de achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p. (Esses números são as raízes da equação $x^2 - sx + p = 0$ e, na realidade, achar as raízes de qualquer equação do segundo grau equivale a resolver um problema desse tipo.) No capítulo 2 daquele livro, aprendemos que os gregos aperfeiçoaram esse conhecimento demonstrando tais regras e conseguindo, pela utilização de processos geométricos, obter raízes irracionais (representadas por certos segmentos de retas) mesmo numa época em que os números irracionais não eram ainda conhecidos.

Na "História da Matemática" de C. Boyer é contada com maiores detalhes a evolução da disciplina conhecida pelo nome de Álgebra, palavra árabe que constava do título do livro de Mohamed Ibn Musa al Khowarism, livro que teve grande influência na preservação do conhecimento matemático durante a Idade Média.

Ainda no livro de Boyer, lemos sobre as contribuições do extraordinário matemático Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci, que viveu no começo do século XIII, foi autor de livros notáveis, continuando a obra de Diofanto de Alexandria sobre soluções inteiras de equações indeterminadas e teve seu nome imortalizado na "seqüência de Fibonacci" 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 etc., onde cada termo é a soma dos dois que o precedem imediatamente. Esta seqüência originou-se num problema sobre reprodução de coelhos mas tem aplicações surpreendentes e variadas. (V. pág. 186 do livro de Boyer e o artigo de G. Ávila na RPM 6, pág. 12.) Os livros de Fibonacci, embora de alto valor científico, não tiveram aceitação e influência educacional comparáveis, por exemplo, às de al Khowarism, um compilador muito bem sucedido.

No meio do século XV teve início o fenômeno sócio-cultural conhecido como a Renascença, caracterizado por uma renovação do interesse pelas coisas do espírito em seus mais altos níveis, por uma efervescência criativa e uma extraordinária explosão produtiva nas artes plásticas, literatura, arquitetura e ciências. Seu epicentro se localizou na Itália, onde surgiram gênios do porte daqueles já mencionados por G. Libri, aos quais acrescentaremos Scipione Ferro, Girolamo Cardano, Niccoló Tartaglia, Loudovico Ferrari e Galileu Galilei, que nasceu no dia em que morreu Michelângelo e viria a morrer no ano do nascimento de Isaac Newton, fazendo lembrar uma corrida de revezamento olímpica.

Em 1494, Frei Luca Pacioli, amigo de Leonardo da Vinci, renomado professor de Matemática, tendo ensinado em diversas Universidades da Itália, escreveu o livro "Summa de Aritmética e Geometria", um bom compêndio de Matemática, contendo noções de cálculo aritmético, radicais, problemas envolvendo equações do primeiro e segundo grau, geometria e contabilidade. Até o aparecimento da Álgebra de Raphael Bombelli, em 1572, o livro de Luca Pacioli (que tinha, além de suas qualidades intrínsecas, a vantagem sobre seus predecessores trazida pela invenção de Guttemberg) teve grande divulgação e prestígio. Como era costume, a incógnita, que hoje chamamos x, era nele denominada "a coisa", enquanto x^2 era "censo", x^3 era "cubo", $x^4 = censo$ censo, etc. A Álgebra era na época chamada "a arte da coisa" ou "arte maior". Depois de ensinar, sob forma de versos, a regra para resolver a equação do segundo grau, Pacioli afirmava que não podia haver regra geral para a solução de problemas do tipo "cubo e coisas igual a número", ou seja, $x^3 + px = q$.

Muitos matemáticos, entre os quais Girolamo Cardano, de quem falaremos a seguir, acreditaram nessa afirmação peremptória de Pacioli. Mas um, pelo menos, não acreditou e fez muito bem em ser cético.

Coube a Scipione Ferro (1465 + 61 = 1526), professor da Universidade de Bolonha, personagem sobre cuja vida muito pouco se conhece, a glória de resolver esse problema de 3 mil anos. Ao que se saiba, ninguém jamais superou seu récorde, resolvendo um problema que tenha desafiado a argúcia dos matemáticos por mais tempo. O curioso é que Ferro nunca publicou sua solução. Na realidade, nunca publicou nada. Sabemos que a duas pessoas ele comunicou o segredo da solução dos problemas do tipo "cubo e coisas igual a número" ($x^3 + px = q$) e "cubo igual a coisas e número" ($x^3 = px + q$): seus discípulos Annibale Della Nave (mais tarde seu genro e sucessor na cadeira de Matemática em Bolonha) e Antonio Maria Fiore. A este último, deu a regra mas não a prova. A descoberta ocorreu provavelmente em torno de 1515. Em 1535 Fiore teve a infeliz idéia de desafiar Tartaglia para uma disputa matemática.

Como vimos acima, esses duelos intelectuais não eram infreqüentes. Eram cercados de ritual, presididos por alguma autoridade e muitas vezes assistidos por numerosa audiência. Alguns contratos de professores universitários eram temporários e muitas vezes a permanência na cátedra dependia de um bom desempenho nessas disputas. Isto talvez explique a atitude sigilosa de Ferro; era bom ter uma bala na agulha para o caso de necessidade. Divulgar sua descoberta seria gastar munição à toa.

Niccoló Tartaglia era professor em Veneza e já tinha derrotado outros desafiantes. Fiore propôs 30 problemas, todos envolvendo, de um modo ou de outro, equações do terceiro grau. Tartaglia fez também sua lista, de natureza bem mais variada. A única arma de Fiore era a fórmula de Ferro. As de Tartaglia eram seu sólido conhecimento e sua inteligência. Oito dias antes do encontro, depois de longas tentativas, ocorreu a Tartaglia como deduzir a fórmula da equação do terceiro grau. Sem dúvida, isto foi uma notável descoberta, porém não tão grande quanto a de Ferro pois Tartaglia sabia, pelas questões que lhe foram propostas, que uma tal fórmula devia existir, enquanto Ferro não podia ter essa certeza. Quem já fez pesquisa em Matemática sabe a grande diferença que isto faz. É a mesma que existe entre resolver um exercício ou demonstrar um novo teorema. Seja como for, Tartaglia resolveu de um golpe os 30 problemas de Fiore, ganhou a disputa e recusou magnanimamente os 30 banquetes estipulados como prêmio ao vencedor.

Notícias sobre o concurso e a natureza dos problemas resolvidos chegaram a Milão, onde vivia o doutor Girolamo Cardano, que ficou muito curioso para saber se e como fora conseguido aquilo que Pacioli julgara impossível.

Cardano usou de todos os meios para atrair Tartaglia a sua casa e lá, mediante promessa de guardar segredo, obteve dele, em 1539, a regra para resolver a equação $x^3+px=q$, dada sob forma de versos um tanto enigmáticos, sem nenhuma indicação de prova.

A vida de Niccoló Tartaglia ($1499+58=1557$) foi muito difícil. Nascido em Brescia, ficou órfão de pai aos seis anos e foi criado, com seus três irmãos, por uma mãe devotada e paupérrima. Aos 14 anos, no saque de Brescia por tropas francesas, refugiou-se na Catedral mas, ali mesmo, foi seriamente ferido no rosto por golpes de sabre que lhe deixaram desfigurado e, por longo tempo, quase sem poder falar. Isto lhe valeu o apelido de Tartaglia (o tartamudo), que posteriormente assumiu como sobrenome. Aprendeu sozinho, "somente em companhia de uma filha da probreza chamada diligência, estudando continuamente as obras dos homens defuntos". Superou todas as difuldades e conseguiu chegar ao limite do conhecimento da época em Matemática, Mecânica, Artilharia e Agrimensura. Descobriu a lei de formação dos coeficientes de $(x+a)^n$, e foi autor de algumas descobertas sobre tiro e fortificações. Por causa delas, sonhava conseguir recompensa do comandante militar de Milão. Esta foi a isca usada por Cardano para atraí-lo.

Girolamo Cardano $(1501 + 75 = 1576)$ era um personagem rico em facetas contraditórias e em talentos vários. Sua vida lhe trouxe alternâncias de fama, fortuna, prestígio, desgraça familiar, severas punições e probreza. Era médico, astrônomo, astrólogo, matemático, filósofo, jogador inveterado e um incansável investigador, cuja curiosidade e interesse por todos os tipos de conhecimento não tinham limites. Escreveu muitos livros sobre todos estes assuntos (mais de cem!), inclusive uma interessantíssima e reveladora autobiografia. Tendo conseguido melhorar vários assuntos tratados por Pacioli, Cardano pretendia publicar um livro de Álgebra, ajudado por seu brilhante e fiel discípulo Ludovico Ferrari.

Depois da visita de Tartaglia, Cardano, com algum esforço, conseguiu demonstrar a validez da regra para resolver a equação $x^3 + px = q$. Naquela época, não era costume concentrar os termos da equação no primeiro membro, deixando apenas zero depois do sinal de igualdade. Nem se percebia que uma equação sem o termo x^2 é o mesmo que ter o mesmo termo com coeficiente zero.

Cardano mostrou que a substituição $x = y - \frac{a}{3}$ permite eliminar o termo em x^2 e, ao todo, deduzir as fórmulas para resolver 13 tipos de equações do terceiro grau! Evidentemente, hoje essas fórmulas se reduziram a uma única. Mas é preciso observar que as equações daquele tempo eram todas numéricas. (O uso de letras para representar números em Álgebra teve início com François Viéte, em 1591.) Logo, a rigor, não havia fórmulas e sim receitas ou regras, explicadas com exemplos numéricos, uma regra para $x^3 + px = q$, outra para $x^3 = px + q$, outra para $x^3 + px^2 = q$, etc.

Os estudos de Cardano, feitos com a colaboração de Ferrari, o qual obteve a solução por radicais da equação do quarto grau, conduziram a importantes avanços na teoria das equações, como o reconhecimento de raízes múltiplas em vários casos, relações entre coeficientes e raízes, e aceitação de raízes negativas, irracionais e imaginárias. (Por estes dois últimos nomes pode-se perceber a má vontade secular para considerá-las. Cardano, entretanto, nunca enunciou explicitamente que uma equação qualquer do terceiro grau deve ter três raízes e uma do quarto grau quatro raízes. Isto foi feito depois, por Bombelli.) Todos esses progressos eram razões mais do que suficientes para a publicação de um livro sobre o assunto. Mas isto ele estava impedido de fazer em virtude de seu juramento a Tartaglia.

Em 1542, entretanto, Cardano e Ferrari visitaram Bolonha e lá obtiveram permissão de Della Nave para examinar os manuscritos deixados por Ferro, entre os quais estava a solução da equação $x^3 + px = q$. O juramento de Cardano o proibia de publicar a solução de Tartaglia mas não a de Ferro, obtida muito antes. Por isso, ele se considerou desobrigado de qualquer compromisso e voltou-se, com energia, à preparação de seu grande livro "Ars Magna", que foi publicado em 1545. O aparecimento dessa notável obra foi recebido favoravelmente pelos entendidos mas provocou reação bem desfavorável de Tartaglia.

Com efeito, no ano seguinte (1546) Tartaglia publica os "Quesiti e Inventioni Diverse", livro já mencionado acima, no qual ele, além de apresentar soluções para vários problemas que lhe foram propostos, descreve fatos autobiográficos e conta a história de suas relações com Cardano, atacando-o asperamente pela quebra de um solene juramento. Nas situações de controvérsia, quase sempre ocorre que cada uma das partes tem razão em alguns pontos e não tem noutros. Vimos acima as razões de Cardano. As razões de Tartaglia, a História comprova. Por muitos séculos, a fórmula da equação do terceiro grau foi conhecida como "fórmula de Cardano", por ter sido publicada pela primeira vez na "Ars Magna", muito embora Cardano tenha dito que a fórmula fora descoberta por Ferro e redescoberta por Tartaglia. Se a fórmula fosse publicada num livro de Tartaglia, a posteridade certamente a conheceria por seu nome. Assim, ele tinha seus motivos para zanga.

A publicação dos "Quesiti" foi respondida por um panfleto de Ferrari (1522 + 45 = 1557) em defesa do seu mestre, o que provocou uma réplica de Tartaglia, iniciando-se uma polêmica que durou mais de um ano (fevereiro de 1547 a julho de 1548) e produziu os 12 panfletos (seis de cada autor), conhecidos como "Cartelli di Sfida Mathematica". (Sfida significa disputa.) No final, Tartaglia aceitou o desafio para um debate matemático contra Ferrari em Milão. (Cardano manteve-se sempre fora da briga, apesar das provocações de Tartaglia.) O resultado do debate não ficou muito claro mas as autoridades universitárias em Brescia, para onde Tartaglia acabara de transferir-se, não ficaram satisfeitas com seu desempenho e cortaram seu contrato. Ele regressou a Veneza, onde morreu, humilde e obscuro, nove anos depois.

Feita esta narração, vejamos agora como se resolve a equação do terceiro grau.

Álgebra

A equação mais geral do terceiro grau é $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Ela é equivalente a

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Logo, basta considerar equações em que o coeficiente de x^3 é igual a 1.

Dada a equação $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a substituição $x = y - a/3$ a transforma em

$$(y - \frac{a}{3})^3 + a(y - \frac{a}{3})^2 + b(y - \frac{a}{3}) + c = 0,$$

ou seja:

$$y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0,$$

que é uma equação desprovida de termo do segundo grau. Portanto, é suficientemente estudar as equações do terceiro grau do tipo

$$x^3 + px + q = 0.$$

Para resolver esta equação, escrevemos $x = u + v$. Substituindo, obtemos

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + p(u + v) + q = 0,$$

isto é:

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Portanto, se conseguirmos achar números u, v tais que

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad uv = -p/3$$

ou seja,

$$u^3 + v^3 = -q, \qquad u^3v^3 = -p^3/27,$$

então $x = u + v$ será raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Ora, o problema de achar u^3 e v^3 conhecendo a sua soma e o seu produto é, como sabemos, de fácil solução: u^3 e v^3 são as raízes da equação do segundo grau

$$w^2 + qw - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Utilizando a fórmula clássica para resolver esta equação, obtemos

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

e

$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

conseqüentemente,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Assim, $x = u + v$, dada pela fórmula acima, é uma raiz da equação $x^3 + px + q = 0$.

Na fórmula acima, destaquemos o radicando $D = q^2/4 + p^3/27$. Mostraremos na seção seguinte que se $D > 0$ a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas; se $D = 0$, tem-se três raízes reais, sendo uma repetida; se $D < 0$ então as três raízes da equação $x^3 + px + q = 0$ são reais e distintas. Este é um aspecto paradoxal da fórmula de Ferro e Tartaglia. Quando $D < 0$, a fórmula exprime $x = u + v$ como soma de duas raízes cúbicas de números complexos. No entanto é este o caso em que a equação possui três raízes reais distintas. Este é chamado tradicionalmente o "caso irredutível" porque, ao tentar eliminar os radicais, recai-se noutra equação do terceiro grau.

Vejamos alguns exemplos, retirados do livro de Álgebra de Leonard Euler, escrito em 1770, o qual serviu de modelo para os compêndios utilizados por sucessivas gerações de estudantes.

Exemplo 1. $x^3 - 6x - 9 = 0$. Aqui, $D = 49/4 = (7/2)^2 > 0$. Logo, a fórmula nos dá a raiz $x = 2 + 1 = 3$. Dividindo $x^3 - 6x - 9$ por $x - 3$, obtemos $x^2 + 3x + 3$, logo as duas raízes restantes são as da equação $x^2 + 3x + 3 = 0$, isto é,

$$-\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{e} \qquad -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Evidentemente, a raiz 3 (como toda raiz inteira) poderia ser obtida mediante simples inspeção, examinando-se os divisores do termo independente -9, sem necessidade de usar a fórmula.

Exemplo 2. Na equação $x^3 - 6x - 40 = 0$, temos $D = 392 = (14\sqrt{2})^2$, logo a fórmula nos dá a raiz

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

e, como foi dito acima, as outras duas raízes são números complexos conjugados. Mas, testando os divisores de 40, vemos que 4 é raiz. Como não há outra raiz real, concluímos que

$$\sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}} = 4,$$

sem dúvida uma identidade interessante. Como

$$(x^3 - 6x - 40) \div (x - 4) = x^2 + 4x + 10$$

e as raízes deste trinômio são $3 \pm i\sqrt{31}$, obtemos as 2 raízes (complexas) que faltavam. Aqui, a fórmula novamente não foi necessária.

Exemplo 3. Seja $x^3 + 3x + 2 = 0$. Temos $D = 2$, logo

$$r = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} + \sqrt[3]{-1 - \sqrt{2}} = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$$

é raiz da equação. As outras duas raízes são complexas; elas são obtidas resolvendo a equação do segundo grau $x^2 + ax + b = 0$, onde $x^2 + ax + b = (x^3+3x+2)\div(x-r)$. Portanto $a = r$ e $b = r^2+3$, isto é, a equação do segundo grau cujas raízes (complexas) são as duas outras raízes de $x^3 + 3x + 2 = 0$ é a equação $x^2 + rx + r^2 + 3 = 0$, onde r foi dada acima. Aqui, a fórmula foi essencial para nos conduzir à raiz r.

Exemplo 4. $x^3 - 3x - 2 = 0$. Neste caso, $D = 0$ e a fórmula nos dá a raiz $x = 2$. Como $(x^3 - 3x - 2) \div (x - 2) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$, as outras raízes são -1 e -1, ou seja, uma raiz dupla. Novamente neste exemplo, chegaríamos às raízes simplesmente examinando os divisores de 2, pois a equação não tem raízes irracionais.

Exemplo 5. A equação $x^3 - 6x - 4$ nos dá $D = -4 < 0$. Portanto ela deve ter 3 raízes reais distintas. A fórmula fornece uma delas: $x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i}$. Isto parece um número complexo mas, pelo que demonstraremos na seção seguinte, tem que ser um número real. Ora, testando os divisores de -4, termo independente de x, vemos que -2 é raiz da equação proposta.

As outras duas são as raízes de $x^2 - 2x - 2 = 0$ porque $x^2 - 2x - 2 = (x^3 - 6x - 4) \div (x + 2)$. Logo as três raízes da equação proposta são -2, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$. Este é um exemplo do caso irredutível: três raízes reais mas a fórmula nos dá um radical complexo. Aqui surge uma questão interessante. Uma dessas três raízes deve ser igual a $\sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$. Qual delas?

A questão pode ser interessante mas a pergunta não está muito bem formulada. Quando z é um número complexo, o símbolo $\sqrt[3]{z}$ significa qualquer número cujo cubo seja igual a z. Excetuando-se $z = 0$, há sempre três números complexos cujo cubo é z. Por exemplo, tomando $z = 1$, vemos que os três números

$$1, \qquad \alpha = (-1 + i\sqrt{3})/2 \qquad \text{e} \qquad \alpha^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$$

têm todos cubo igual a 1. Estas são as raízes cúbicas da unidade. Dado qualquer número complexo z, se w é uma raiz cúbica de z, as outras duas são αw e $\alpha^2 w$, onde $\alpha = (-1 + i\sqrt{3})/2$.

Na fórmula $x = \sqrt[3]{2+2i} + \sqrt[3]{2-2i}$, que dá uma raiz da equação $x^3 - 6x - 4 = 0$, cada radical tem portanto 3 valores. Olhando assim, parece que obteremos ao todo 9 raízes para a equação dada. Claro que não. Temos $x = u + v$, com $uv = -p/3 = 2$, logo $v = 2/u$. Isto mostra que, quando escolhemos um valor para u (entre os 3 valores possíveis de $\sqrt[3]{2+2i}$), o valor correspondente de v fica determinado. Assim, temos somente 3 raízes. Ainda bem.

Mas, como se faz para calcular $\sqrt[3]{2+2i}$ e $\sqrt[3]{2-2i}$?

Usando a notação $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\,\text{sen}\varphi$, temos

$$2 + 2i = \sqrt{8}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{8}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\text{sen}\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{8}\; e^{i\pi/4}.$$

Portanto um dos três valores de $\sqrt[3]{2+2i}$ é

$$u_1 = \sqrt[3]{2+2i} = \sqrt[6]{8}\; e^{i\pi/12} = \sqrt{2}\; e^{i\pi/12} = \sqrt{2}(\cos 15^0 + i\,\text{sen}15^0).$$

O valor correspondente de v é:

$$v_1 = u_1^2 = \frac{2}{|u_1|^2}\overline{u}_1 = \overline{u}_1 = \sqrt{2}(\cos 15^0 - i\,\text{sen}15^0).$$

Logo uma das raízes da equação é

$$x_1 = u_1 + v_1 = 2\sqrt{2}\cos 15^0 = 2\sqrt{2}\;\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} = 1 + \sqrt{3},$$

que é uma das três raízes que conhecíamos. Ela foi obtida porque escolhemos $e^{i\pi/12}$ como valor da raiz cúbica de $e^{i\pi/4}$. Se tivéssemos escolhido $e^{i3\pi/4} = \cos 135^0 + i\,\text{sen}\,135^0$ obteríamos a raiz $x_2 = -2$ e, se tomássemos $e^{-7\pi/12} = \cos 105^0 - i\,\text{sen}\,105^0$ como raiz cúbica de $e^{i\pi/4}$, obteríamos $x_3 = 1 - \sqrt{3}$.

Na seção seguinte, mostraremos como fatos elementares de cálculo podem ser usados para explicar a natureza das raízes da equação $x^3+px+q = 0$ a partir do sinal do discriminante $D = q^2/4 + p^3/27$.

Cálculo

Vamos examinar o gráfico da função $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, dada por $f(x) = x^3 + px + q$. Cada ponto que o gráfico tiver em comum com o eixo das abcissas corresponderá a uma raiz real da equação $x^3 + px + q = 0$.

Preliminarmente, observemos que

$$f(x) = x^3(1 + \frac{p}{x^2} + \frac{q}{x^3}).$$

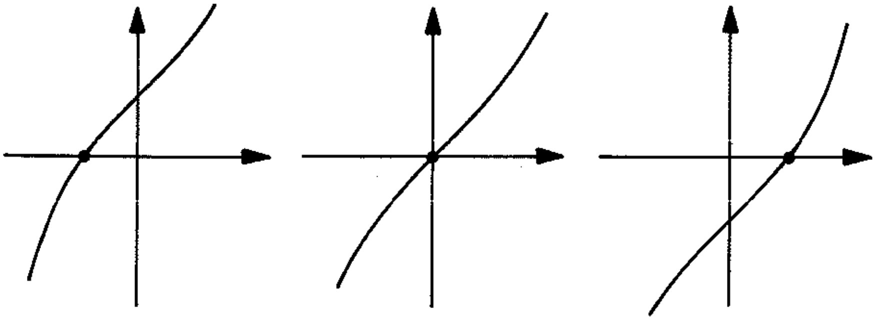
Para valores de x que tenham valor absoluto muito grande, p/x^2 e q/x^3 são insignificantes, logo, para tais valores, na soma dentro dos parênteses prevalece o sinal de 1, que é positivo. Então o sinal de $f(x)$, quando o valor absoluto de x é muito grande, é o mesmo sinal de x^3, isto é, de x. Em particular, o polinômio $f(x)$ é negativo para valores muito grandes negativos de x e é positivo se x é um número positivo muito grande. Segue-se daí que $f(x)$, por passar continuamente de negativo a positivo, deve anular-se em algum ponto. Toda esta conversa serve para concluir que toda equação do teceiro grau tem pelo menos uma raiz real. Ou seja: o gráfico de $f(x) = x^3 + px + q$ corta o eixo das abcissas em pelo menos um ponto.

Quando $p > 0$, a derivada $f'(x) = 3x^2 + p$ é sempre positiva, logo f é uma função crescente, que corta o eixo x num único ponto. Logo, quando $p > 0$, a equação $x^3 + px + q = 0$ tem uma única raiz real, a qual pode ser positiva, negativa ou nula, e duas raízes complexa conjugadas (Fig. 1).

Quando $p = 0$, a equação reduz-se a $x^3 = -q$, logo tem uma raiz real e duas complexas quando $q \neq 0$ e uma raiz real tripla (igual a zero) se $q = 0$. Os gráficos correspondentes são dados abaixo, (Fig. 2).

Consideremos agora o caso mais interessante, em que $p < 0$. Então podemos escrever $p = -3a^2$, $a > 0$. A função se torna $f(x) = x^3 - 3a^2x + q$, e sua derivada é $f'(x) = 3x^2 - 3a^2$, que se anula nos pontos $x = \pm a$. Como a derivada segunda $f''(x) = 6x$ é negativa no ponto $x = -a$, este é um ponto de máximo. Por motivo análogo, a função tem um mínimo no ponto $x = a$.

O gráfico de f apresenta uma das formas ilustradas na Fig. 3, conforme a equação $x^3 + px + q = 0$ tenha uma raiz real e duas complexas, uma raiz real simples e uma dupla, ou três raízes reais distintas.



Uma raiz real, negativa.

Uma raiz real, nula.

Uma raiz real, positiva.

Figura I

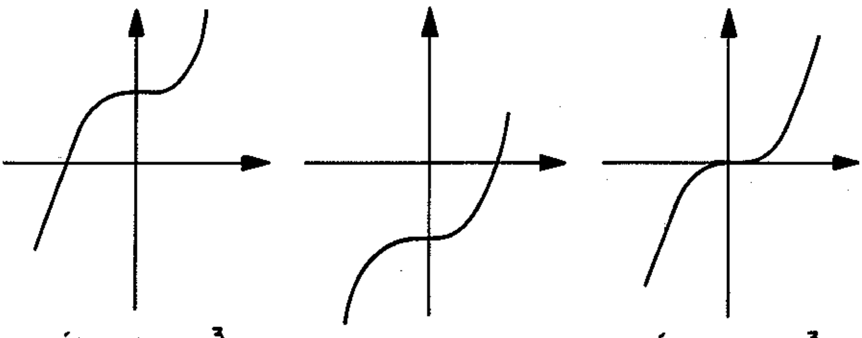
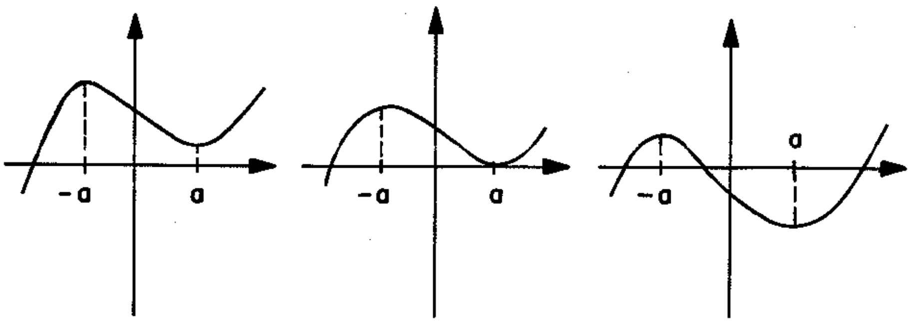


Gráfico de $y = x^3 + q$, $q \neq 0$.

Gráfico de $y = x^3$.

Figura 2



Uma raiz real, duas complexas. | Uma raiz real simples, uma dupla. | Três raizes reais distintas.

Figura 3

Estes três casos correspondem, respectivamente, a $f(a) \cdot f(-a) > 0$, $f(a) \cdot f(-a) = 0$ e $f(a) \cdot f(-a) < 0$. Temos:

$$f(a) \cdot f(-a) = (q - 2a^3)(q + 2a^3) = q^2 - 4a^6 = q^2 + \frac{4}{27}p^3 = 4(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}) = 4D.$$

(Lembremos que $p = -3a^2$). Portanto, o sinal de $f(a) \cdot f(-a)$ é o mesmo do discriminante D.

Conclusão: A equação do terceiro grau $x^3 + px + q = 0$ tem uma, duas ou três raízes reais distintas conforme $D = q^2/4 + p^3/27$ seja positivo, nulo, ou negativo, respectivamente.

Observação: Além dos livros de Aaboe, Libri e Boyer mencionados no texto, referências específicas sobre esse tema podem ser encontradas nas fontes da lista seguinte.

Referências

[1] ORE, O.: *Cardano, the Gambling Scholar*, Princeton University Press, 1953.

[2] VAN DER WAERDEN, B. L.: *A History of Algebra*, Springer Verlag, 1985.

[3] *Dictionary of Scientific Biography*, Scribner's Publ., 1970.

[4] TARTAGLIA, N. *Quesiti et Inventioni Diverse* (publicação comemorativa do IV centenário da morte de Niccolo Tartaglia), Brescia, 1959.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada — CNPq
Estada Dona Castorina 110 — Jardim Botânico
22.460 Rio de Janeiro, RJ