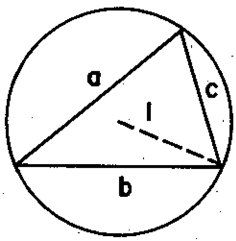
PROBLEMAS E SOLUÇÕES

Novos Problemas Propostos

Problema 7. *Sejam A e B subconjuntos abertos e limitados do $\mathbf{R}^n$, com fronteiras coincidentes. Será que $A = B$?* (Proposto por Ruy Exel, IME – USP.)

Problema 8. *Dado $p > 0$, determinar o triângulo inscrito no círculo unitário tal que a soma das $p-$ésimas potências dos comprimentos dos lados seja máxima.* (Proposto por Daniel Henry, IME — USP.)



$$a^p + b^p + c^p = \text{máximo}$$

Problema 9. *Uma matriz $n \times n$ é positiva se suas entradas são números reais não negativos. Seja G um grupo de matrizes positivas cujo elemento neutro é a matriz identidade. Se G é limitado em norma, G é finito?* (Proposto por Laura Martignon, IME – USP.)

Soluções de Problemas Anteriores

Problema 4, MU No. 4: *Seja A um conjunto aberto, convexo e limitado do plano. Uma reta ℓ desse plano é um eixo de simetria de A se a reflexão sobre ℓ deixar o conjunto A invariante. Prove que se A possui três ou mais* *eixos de simetria, todos eles passam pelo mesmo ponto.*

Soluções (de Elon Lages Lima, IMPA – RJ). *Primeira Solução:* O fecho de A em $\mathbf{R}^2$ é homeomorfo a um disco fechado. Sejam $\alpha, \beta, \gamma : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ reflexões em torno de três eixos. Supondo que α, β e γ deixem A invariante, obtemos uma aplicação contínua $f = \alpha \circ \beta \circ \gamma : \overline{A} \to \overline{A}$, a qual, pelo Teorema de Brouwer, admite um ponto fixo $z \in \overline{A}$. Consideremos o triângulo cujos vértices são $z, \gamma(z)$, $\beta(\gamma(z))$. Suas três mediatrizes se encontram num único ponto P, equidistante dos vértices. A mediatriz do lado $z\gamma(z)$ é o eixo de reflexão γ. A mediatriz do lado $\gamma(z)\beta\gamma(z)$ é o eixo da reflexão β. Como $z = \alpha\beta\gamma(z)$, concluimos que a mediatriz do lado $z\beta\gamma(z)$ é o eixo da reflexão α. Segue-se que os três eixos se encontram no ponto P. (Se ocorrer que os três pontos $z, \gamma(z)$ e $\beta\gamma(z)$ não são distintos, a solução é trivial.)

Segunda Solução: Suponhamos que A admita 3 eixos de simetria que se intersectem, dois a dois, em três pontos distintos. Tomemos no plano um sistema de coordenadas cartesianas x, y cuja origem é um desses pontos e tal que o terceiro eixo de simetria (que não passa por este ponto) seja paralelo ao eixo x.

Então a equação desse eixo de simetria horizontal será $y = c$, $c > 0$. É conveniente identificar cada ponto de coordenadas x, y neste sistema ao número complexo $z = x + iy$. A reflexão em torno do eixo $y = c$ é a transformação $z \mapsto \overline{z} + 2ci$. A composta das reflexões em torno dos outros dois eixos de simetria é numa transformação linear (pois cada uma dessas reflexões deixa fixa a origem), tem determinante positivo (pois cada reflexão tem determinante negativo) e preserva distâncias. Logo é uma rotação. Noutras palavras, existe um número complexo v, de módulo 1, tal que a composta das duas referidas reflexões é a transformação $z \mapsto v \cdot z$. Conseqüentemente, a composta das três reflexões é a transformação $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, dada por $f(z) = v(\overline{z} + 2ci)$. Como duas reflexões relativamente a eixos distintos são diferentes, isto é, uma não é inversa da outra, temos $v \neq 1$. Pondo $d = v \cdot 2ci$, segue-se que $v\overline{d} + d \neq 0$. Ora, para todo $n \in \mathbf{N}$ valem as igualdades

$$f^{2n}(z) = z + n(v\overline{d} + d),$$

$$f^{2n+1}(z) = v\overline{z} + d + n(v\overline{d} + d).$$

Segue-se que

$$\lim_{n\to\infty} f^n(z) = \infty \qquad \text{para cada} \qquad z \in C.$$

Conseqüentemente, nenhum conjunto limitado $x \subset C$ pode ser invariante por f.

Uma solução análoga foi apresentada por Derek Hacon da PUC/RJ.

Problema 5, MU No. 4: *Seja* $A = (a_{ij})$, $1 \leq i,\ j \leq n$, *uma matriz real tal que*

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0,$$

i.e., a soma de qualquer linha ou coluna se anula. Então todos os cofatores se anulam.

Solução (de Derek Hacon, Departamento de Matemática, PUC - RJ). Sejam $\mathrm{Cof}_{ij} A$ os cofatores de A. O caso $n = 3$ é típico

$$\mathrm{Cof}_{11} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix} = \mathrm{Cof}_{11} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a-g & -b-h & -c-k \\ g & h & k \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Cof}_{11} \begin{pmatrix} a & b & c \\ -a & -b & -c \\ g & h & k \end{pmatrix} = \mathrm{Cof}_{11} \begin{pmatrix} d & e & b \\ -a & -b & -c \\ g & h & k \end{pmatrix} =$$

$$= \mathrm{Cof}_{12} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & b \\ g & h & k \end{pmatrix}.$$

Da mesma maneira $\mathrm{Cof}_{ij} = \mathrm{Cof}_{kj}$ para todo i, j, k e (trocando linhas por colunas) $\mathrm{Cof}_{ji} = \mathrm{Cof}_{jk}$ para todo i, j, k. Portanto todos os cofatores coincidem.

Problema 6, MU No. 4: a) *Seja* $B = (b_{ij})$, $1 \leq i,\ j \leq n$, *uma matriz estocástica, i.e. os* b_{ij} *são números reais positivos e*

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1.$$

Se 1 *é o único autovalor de* B *então* B *é a matriz identidade.*

b) $B = (b_{ij})$ *é duplamente estocástica se* $b_{ij} \geq 0$ *e*

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} = 1.$$

Se $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n = 1$ *então existe uma matriz* B *duplamente estocástica tal que* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *são os autovalores de* B.

Solução (de Derek Hacon). a) Como o traço de B é n, que é a soma dos autovalores, segue-se imediatamente que B é a identidade. b) O caso $n = 3$ é típico. Sejam e_1, e_2, e_3 as colunas de

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

e $B = \lambda_1 I + (\lambda_2 - \lambda_1)P_1 + (1 - \lambda_2)P_2$. É claro que B é duplamente estocástoca. Também é claro que $P_i e_j = 0$ se $i \geq j$ e que $P_i e_j = e_j$ se $i < j$. Então $Be_1 = \lambda_1 e_1$, $Be_2 = \lambda_2 e_2$, $Be_3 = e_3$ como queriamos mostrar.