Matemática Universitária, N. 6, Dezembro de 1987, 49-63.

Curvas Regulares no Plano

Elon Lages Lima
Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico
22.460 – Rio de Janeiro, RJ

1. Introdução

A noção de homotopia, ou deformação contínua, é uma das mais importantes e, ao mesmo tempo, mais intuitivas da Topologia.

Neste artigo, exporemos um pequeno tópico da teoria da homotopia, o qual esperamos seja elementar bastante para ser amplamente compreendido e suficientemente belo para ser apreciado. Trata-se, além disso, de um exemplo ilustrativo de como uma idéia simples, porém fértil, tratada por mãos competentes pode frutificar e desenvolver-se, vindo a se tornar, anos mais tarde, um respeitável capítulo da Topologia Diferencial como é hoje a Teoria das Imersões.

Trataremos de curvas fechadas no plano.

Se considerada em toda a sua generalidade, a homotopia de curvas fechadas em $\mathbb{R}^2$ é uma noção trivial pois, sendo qualquer curva no plano continuamente deformável num ponto, segue-se por transitividade que duas curvas fechadas quaisquer em $\mathbb{R}^2$ são homotópicas. Se impusermos a restrição de que as curvas e as homotopias devem estar num subconjunto fixado $X \subset \mathbb{R}^2$, então a noção deixa de ser trivial, mas não é esta a restrição que faremos aqui. Permitiremos que curvas e homotopias percorram todo o plano mas, em compensação, exigiremos que sejam *regulares*.

Isto significa que as curvas fechadas possuem tangente em cada um dos seus pontos, e que essa tangente varia continuamente ao longo da curva. Além disso, a regularidade deve ser preservada durante cada homotopia (ou deformação), no decorrer da qual não somente a curva como sua tangente devem variar continuamente.

Nestas condições, já não é mais verdade que duas curvas fechadas regulares quaisquer no plano sejam regularmente homotópicas. Por exemplo, não é possível deformar continuamente a figura 8 na figura 0 sem que em algum estágio da deformação a curva apresente um ponto anguloso (onde não há tangente bem determinada) ou a tangente num ponto da curva varie descontinuamente durante a deformação. Este fato será provado rigorosamente mais adiante. Mas cremos ser interessante apresentar agora, por meio de figuras, duas tentativas malogradas de passar de 8 para 0 por meio de uma homotopia regular.

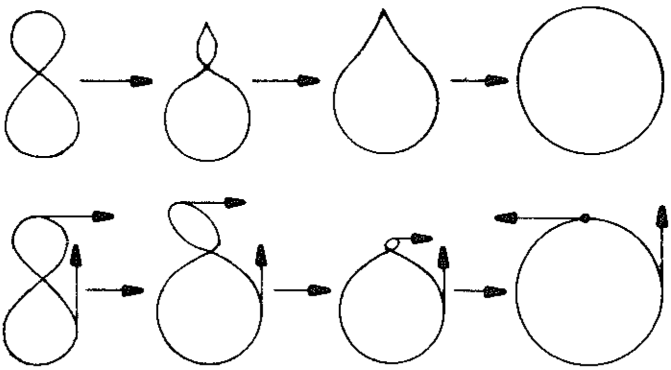

Figura 1

Duas deformações contínuas no plano que começam com a Figura 8 e terminam com a Figura 0. Na primeira, as curvas intermediárias apresentam um ponto anguloso, logo não são curvas regulares. Na segunda, em cada estágio da deformação tem-se uma curva regular mas, se fixarmos a atenção no vetor tangente a um certo ponto da curva, veremos que, no final da deformação, ele sofre uma descontinuidade, dando um brusco salto de 180°. Logo, nenhuma das duas deformações é uma homotopia regular.

O problema que abordaremos aqui é o seguinte: quando é que duas curvas fechadas regulares no plano $\mathbb{R}^2$ são regularmente homotópicas? A resposta será dada em termos do *número de rotação* de uma curva fechada regular, que é o número de voltas percorridas pelo vetor tangente a cada ponto, quando esse ponto descreve a curva uma vez.

O número de rotação (Umlaufzahl) de uma curva fechada regular é uma noção clássica. Ele é objeto de um teorema, conhecido como "Umlaufsatz", segundo o qual o número de rotação de uma curva fechada *simples* é ± 1. Este teorema possui uma demonstração de rara elegância, dada por H. Hopf [4], a qual é exposta em [1], página 396.

Dois anos depois da demonstração de Hopf, H. Whitney publicou, na mesma revista, um artigo [12] no qual provou que duas curvas fechadas regulares no plano são regularmente homotópicas se, e somente se, têm o mesmo número de rotação. (Como a figura 8 tem número de rotação zero, enquanto o círculo tem número de rotação ± 1, dependendo do sentido em que é percorrido, vê-se então que essas duas curvas não podem ser regularmente homotópicas.) Naquele trabalho, Whitney declara que esse teorema, com uma demonstração simples, lhe fora comunicado por W. Greustein. Whitney dá ainda um método para deteminar o número de rotação, contando o número algébrico de vezes em que a curva corta a si própria (supondo que essas auto–interseções são transversais). Esse método contém como caso particular o Umlaufsatz mas não se pode concluir daí uma nova prova deste teorema porque o argumento de Whitney se baseia na idéia da demonstração de Hopf.

As homotopias regulares de curvas fechadas voltaram a ser estudadas, vinte anos depois, por S. Smale, em sua tese de doutoramento [9]. Alí Smale considera curvas regulares numa superfície ou, mais geralmente, numa variedade riemanniana qualquer e mostra que as classes de homotopia regular dessas curvas estão em correspondência biunívoca com as classes de homotopia de laços contínuos no fibrado tangente unitário da variedade. Como uma esfera de dimensão ≥ 2 é simplesmente conexa, resulta do teorema de Smale que, numa variedade de dimensão ≥ 3, duas curvas regulares fechadas são regularmente homotópicas se, e somente se, são homotópicas no sentido usual. Já para superfícies (de dimensão 2), há fatos novos: na esfera S^2 existem duas classes; no plano projetivo há quatro classes; no toro, as classes de homotopia regular estão em correspondência biunívoca com $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, etc.

Subseqüentemente, Smale estendeu seus métodos para tratar de imersões da esfera S^k no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ [10], [8]. (Curvas fechadas regulares são imersões de S^1.) Ele provou, então, que as classes de homotopia regular das imersões de S^k em $\mathbb{R}^n$ estão em correspondência biunívoca com os elementos do grupo de homotopia usual $\pi_k(V_{n,k})$, onde $V_{n,k}$ é a variedade de Stiefel dos k-referenciais no espaço $\mathbb{R}^n$. Como $\pi_2(V_{3,2}) = 0$, resulta do teorema de Smale que duas imersões quaisquer de S^2 em $\mathbb{R}^3$ são regularmente homotópicas.

No início de sua carreira (1957), Smale expôs esses resultado num seminário na Universidade de Chicago, no qual estava presente o renomado topólogo S. Eilenberg, que fez a seguinte observação: "Este teorema não pode estar certo, pois implica que a inclusão natural $S^2 \to \mathbb{R}^3$ é regularmente homotópica à aplicação antípoda $\alpha : S^2 \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(x) = -x$. Noutras palavras, segundo ele, pode-se virar regularmente uma esfera pelo avesso em $\mathbb{R}^3$, o que é um absurdo". Smale limitou-se a sorrir e dizer: "Não sei como realizar geometricamente a deformação. Mas sei que ela pode ser feita, pois minha demonstração está correta". Pouco depois, A. Shapiro e B. Morin mostraram como construir geometricamente uma homotopia regular (bastante engenhosa) que vira S^2 pelo avesso. Repetia-se o epsódio da descoberta do planeta Netuno. A construção de Morin é mais notável ainda porque ele é cego. Para uma descrição da mesma, veja [2] ou o filme [7].

Posteriormente, os trabalhos de Smale foram estendidos por M. Hirsch, A. Haefliger e outros, que desenvolveram a teoria das imersões de uma variedade diferenciável noutra. Veja, por exemplo, [3].

Quero deixar registrados agadecimentos ao meu colega Carlos Isnard por importantes melhoramentos nesta redação.

2. O Número de Rotação

Uma *curva regular* no plano é uma imersão $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1. Aqui, $S^1 = \{z = (x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ é o *círculo unitário* e dizer que f é uma imersão de classe C^1 significa afirmar que $F : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, dada por $F(t) = f(e^{it}) = f(\cos t, \operatorname{sen} t)$, é de classe C^1, com $F'(t) \neq 0$ para todo $t \in [0, 2\pi]$, $F(0) = F(2\pi)$ e $F'(0) = F'(2\pi)$.

A rigor, deveríamos dizer "curva regular fechada" mas, por simplicidade, diremos apenas "curva regular" pois não consideraremos outro tipo de curva.

Alternativamente, pode-se definir uma curva regular como uma aplicação $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1, com $F'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$, $F(a) = F(b)$ e $F'(a) = F'(b)$.

Dada uma tal F, podemos definir a função $\xi : [a, b] \to [0, L]$,

$$L = \int_a^b |F'(t)|dt, \qquad \text{pondo} \qquad \xi(t) = \int_1^t |F'(s)|ds.$$

Então vemos que $\xi'(t) = |F'(t)| > 0$ para todo t, logo ξ é uma bijeção e $\xi^{-1} : [0, L] \to [a, b]$ é de classe C^1.

A aplicação $G = F \circ \xi^{-1} : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ é uma *reparametrização* de F com a importante propriedade de ser $|G'(s)| = 1$ para todo $s \in [0, L]$. O número L é o comprimento da curva $F([a, b])$ e G diz-se *parametrizada pelo comprimento do arco,* por causa da relação

$$\int_0^t |G'(s)|ds = t.$$

O *número de rotação* de uma curva regular $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ é o número de voltas que o vetor tangente $F'(t)$ percorre quando t varia de a até b.

Esta noção pode ser definida precisamente assim: para cada $t \in [a, b]$, temos

$$F'(t) = |F'(t)| \cdot e^{i\alpha(t)}, \qquad \text{onde} \qquad \alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$$

é uma função ângulo contínua. (Vide o Apêndice.) Como $F'(a) = F'(b)$, temos $\alpha(b) - \alpha(a) = 2\pi \cdot n$, onde $n = n(F)$ é um número inteiro, que chamamos o *número de rotação* da curva regular F.

Se $\beta : [a,b] \to \mathbb{R}$ é outra função ângulo contínua para F', isto é, se $F'(t) = |F'(t)|e^{i\beta(t)}$ para todo $t \in [a,b]$, então $\beta(t) - \alpha(t)$ é constante, logo $\beta(b) - \beta(a) = \alpha(b) - \alpha(a)$. Assim, o número de rotação $n(f)$ não depende da escolha da função ângulo contínua para F'.

Como não distinguiremos entre uma curva regular $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ e uma sua reparametrização

$$G = F \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^2, \qquad \text{onde} \qquad \varphi : [c,d] \to [a,b]$$

é uma bijeção de classe C^1 com derivada positiva, tal que $\varphi'(c) = \varphi'(d)$, devemos também mostrar que $n(F) = n(F \circ \varphi)$. Com efeito, para todo $t \in [c,d]$, temos

$$\begin{aligned} G'(t) = \varphi'(t) \cdot F'(\varphi(t)) &= \varphi'(t) \cdot |F'(\varphi(t))|e^{i\alpha(\varphi(t))} = \\ &= |G'(t)|e^{i\alpha(\varphi(t))}, \end{aligned}$$

logo, se $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função ângulo contínua para F' então $\alpha \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ é uma função ângulo contínua para G'. Conseqüentemente

$$n(G) = \frac{\alpha(\varphi(d)) - \alpha(\varphi(c))}{2\pi} = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{2\pi} = n(F).$$

3. Homotopias Regulares

Sejam $f,\ g : S^1 \to \mathbb{R}^2$ curvas regulares. Uma *homotopia regular* entre f e g é uma aplicação $H : S^1 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1, tal que, para cada $u \in [0,1]$, a aplicação parcial $H_u : S^1 \to \mathbb{R}^2$, dada por $H_u(t) = H(t,u)$, é uma curva regular, com $H_0 = f$ e $H_1 = g$.

Assim, uma homotopia regular entre f e g é uma família continuamente diferenciável, a um parâmetro, de curvas regulares, começando com f e terminando com g.

Alternativamente, se $F,\ G : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ são curvas regulares, uma homotopia regular entre F e G é uma aplicação $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$, de classe C^1, tal que $H(t,0) = F(t)$, $H(t,1) = G(t)$ e $\frac{\partial H}{\partial t}(t,u) \neq 0$ para quaisquer $t \in [a,b]$ $u \in [0,1]$. Além disso,

$$H(a,u) = H(b,u), \quad \frac{\partial H}{\partial t}(a,u) = \frac{\partial H}{\partial t}(b,u) \quad \text{para todo} \quad u \in [0,1].$$

Na Figura 1, não se tem homotopias regulares porque, no primeiro caso, as curvas H_u não são todas regulares. No segundo caso, H_u é uma curva regular para todo $u \in [0,1]$ mas $\frac{\partial H}{\partial t}(u,t)$ não depende continuamente de u. Mais precisamente, para algum t_0 tem-se

$$\lim_{u\to 1} \frac{\partial H}{\partial t}(u,t_0) = -\frac{\partial H}{\partial t}(1,t_0).$$

Na Figura 2 são exibidos três exemplos de homotopias regulares.

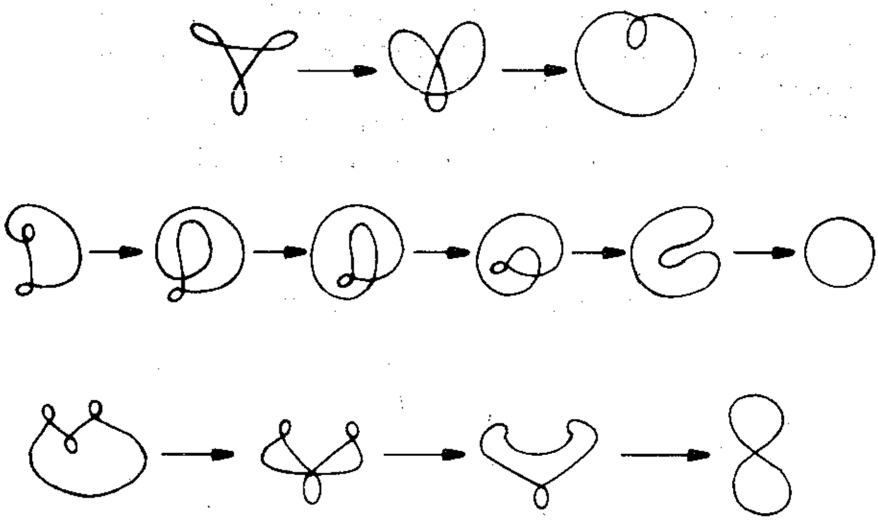

Figura 2

4. O Teorema de Graustein–Whitney

Inicialmente, mostraremos que o número de rotação fica invariante sob uma homotopia regular:

Duas curvas regulares regularmente homotópicas têm o mesmo número de rotação.

Com efeito, na notação do parágrafo anterior podemos obter $\alpha : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que, para todo $(t,u) \in [a,b] \times [0,1]$ temos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t,u) = |\frac{\partial H}{\partial t}(t,u)| \cdot e^{i\alpha(t,u)}.$$

Como

$$n(H_u) = \frac{\alpha(b,u) - \alpha(a,u)}{2\pi}$$

é inteiro, para cada $u \in [0,1]$, segue-se que $n(H_n)$ é constante em relação a u. Em particular, $n(F) = n(H_0) = n(H_1) = n(G)$.

Agora fica fácil mostrar que as curvas regulares 8 e 0 não são regularmente homotópicas: a primeira tem índice de rotação igual a zero e a segunda, ± 1 (dependendo do sentido em que 0 é percorrido).

Mais precisamente, a curva $F : [0, 2\pi] \to I\!R^2$, dada por $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ é o círculo S^1 percorrido no sentido anti-horário. Tem número de rotação $n(F) = 1$. Por outro lado, $G : [0, 2\pi] \to I\!R^2$, $G(t) = (\cos t, -\operatorname{sen} t)$, tem número de rotação $n(G) = -1$. Segue-se que F e G não são regularmente homotópicas.

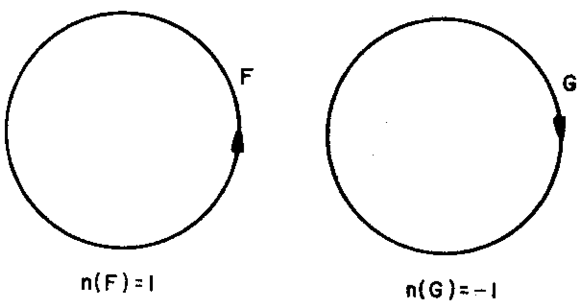

Figura 3

O que foi provado acima é a primeira parte do *Teorema de Graustein–Whitney. Duas curvas regulares em* $I\!R^2$ *são regularmente homotópicas se, e somente se, têm o mesmo número de rotação.*

Demonstração (da segunda parte): Por meio de uma homotopia regular, podemos alterar o comprimento de uma curva regular de modo a fazê-la ter um comprimento arbitrariamente dado. Logo, não há perda de generalidade em supor que as curvas regulares F, $G : [0, L] \to I\!R$, com $n(F) = n(G) = n$, têm o mesmo comprimento L e cumprem $|F'(t)| = |G'(t)| = 1$ para todo $t \in [0, L]$, isto é, são parametrizadas pelo comprimento de arco. Além disso, podemos supor que $F(0) = G(0) = 0$ e $F'(0) = G'(0) = e_1$ = vetor unitário do eixo das abcissas.

Então $F'(t) = e^{i\alpha(t)}$, $G'(t) = e^{i\beta(t)}$, onde α, $\beta : [0, L] \to \mathbb{R}$ são funções ângulo contínuas, com $\alpha(0) = \beta(0) = 0$ e $\alpha(L) = \beta(L) = 2\pi \cdot n$. Definiremos uma homotopia $K : [0, L] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ entre α e β, pondo

$$K(t, u) = (1 - u)\alpha(t) + u \cdot \beta(t).$$

Com auxílio de K, definiremos uma homotopia $H : [0, L] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ entre as curvas F e G pondo:

$$H(t, u) = \int_0^t e^{iK(s,u)} ds - \frac{t}{L} \int_0^L e^{iK(s,u)} ds.$$

A subtração do último termo na definição de H tem a finalidade de fazer com que todas as curvas H_u, $0 \leq u \leq 1$, sejam fechadas. Passemos às verificações. Como

$$F(t) = \int_0^t e^{i\alpha(s)} ds \qquad \text{e} \qquad G(t) = \int_0^t e^{i\beta(s)} ds,$$

vê-se imediatamente que $H(t, 0) = F(t)$ e $H(t, 1) = G(t)$. Além disso, é claro que $H(0, u) = H(L, u) = 0$ e que

$$\frac{\partial H}{\partial t}(0, u) = \frac{\partial H}{\partial t}(L, u) \quad \text{para todo} \quad u \in [0, 1].$$

Resta verificar que $\frac{\partial H}{\partial t}(t, u) \neq 0$ para todo $t \in [0, L]$, e todo $u \in [0, 1]$. Temos:

$$\frac{\partial H}{\partial t}(t, u) = e^{iK(t,u)} - \frac{1}{L} \int_0^L e^{iK(s,u)} ds.$$

O problema é o seguinte: dado um caminho $\lambda : [0, L] \to S^1$, $\lambda(t) = e^{iK(t,u)}$, pode o seu valor médio $\frac{1}{L} \int_0^L \lambda(s) ds$ ser um ponto do círculo S^1? Um exercício simples de Cálculo mostra que isto só pode acontecer quando o caminho λ é constante.

No nosso caso, concluímos que H é uma homotopia regular, entre F e G, salvo se ocorrer que, para algum valor $u \in [0,1]$, o caminho $\lambda(t) = e^{iK(t,u)}$ ou (o que dá no mesmo) a função $\mu(t) = K(t,u)$, seja constante. Como $\mu(0) = 0$, tal constante deve ser zero e daí $0 = \mu(L) = K(L,u) = 2\pi \cdot n$. Logo $n = n(F) = n(G) = 0$ e vale para algum $u \in [0,1]$, a igualdade

$$(1-u)\alpha(t) + u \cdot \beta(t) = 0, \quad \text{isto é}, \quad \alpha(t) = \frac{u}{u-1} \cdot \beta(t),$$

seja qual for $t \in [0,L]$. (Note que $0 < u < 1$ no que as funções α e β não podem ser identicamente nulas.

Em resumo: se as curvas regulares F e G têm o mesmo número de rotação então a função H acima definida é uma homotopia regular entre elas salvo quando esse número de rotação for zero e, além disso tiver-se $F'(t) = e^{i\alpha(t)}$, $G'(t) = e^{i\beta(t)}$, onde α, $\beta : [0,L] \to I\!R$ são funções contínuas que se anulam nas extremidades 0, L, sendo $\alpha = \frac{u}{u-1}\beta$, isto é, a função α é um múltiplo constante negativo da função β.

Para resolver este caso restante, tomamos qualquer função contínua $\gamma : [0,L] \to I\!R$ que seja nula nos pontos 0, L e que não seja um múltiplo constante de β (nem de $\alpha = \frac{u}{u-1}\beta$). Então redefinimos $K : [0,L] \times [0,1] \to I\!R$ pondo

$$K(t,u) = (1-u)\alpha(t) + u\beta(t) + u(u-1)\gamma(t).$$

Como a última parcela se anula para $u = 0$ e para $u = 1$, vemos que K é ainda uma homotopia entre α e β. É o mais importante: para nenhum valor de $u \in [0,1]$, a função $\mu(t) = K(t,u)$ pode ser identicamente nula.

Isto encerra a demonstração do Teorema.

5. Curvas Regulares na Esfera S^2

Em vez do palno $I\!R^2$, podemos considerar curvas regulares $F : [a,b] \to S^2$ na esfera

$$S^2 = \{(x,y,z) \in I\!R^3; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

Como se sabe, $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$. A existência do ponto no infinito permite realizar homotopias regulares que não eram possíveis em $\mathbb{R}^2$. Por exemplo, o círculo equatorial em S^2, percorrido num sentido, é regularmente homotópico ao mesmo círculo percorrido no sentido inverso. Basta girá-lo de 180^o em torno de dois pontos antípodas fixados sobre ele.

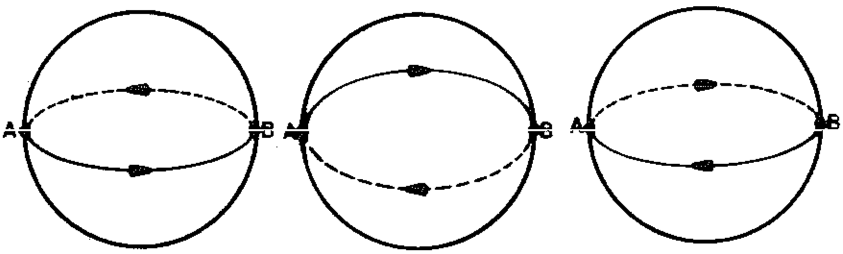

Figura 4

O equador da esfera dá um giro de 180^o, durante o qual os pontos antípodas A e B permanecem fixos. No final do giro, o equador está com a orientação oposta da inicial.

Isto mostra que, para curvas regulares na esfera S^2, não há como distinguir entre $n(F)$ e $-n(F)$. Algo mais drástico ainda é válido. Enquanto que no plano há uma infinidade de classes de homotopia regular de curvas (uma classe para cada $n \in \mathbb{Z}$). na esfera há apenas duas. Uma curva regular na esfera é regularmente homotópica à curva 0 ou à curva 8. Além disso, 0 e 8 não são regularmente homotópicas em S^2.

Com efeito, em primeiro lugar, qualquer curva regular na esfera ocupa apenas uma parte de $\mathbb{R}^2$, logo é regularmente homotópica a uma curva padrão cujo modelo é dado na Figura 5.

Em seguida, usando toda a esfera para realizar a homotopia, podemos deformar regularmente a terceira curva da Figura 5 na curva 8, a quarta curva na curva 0, etc. de modo que todas as curvas arroladas na figura 5 reduzem-se, mediante homotopias regulares, às curvas 0 e 8. A figura 6, abaixo, mostra como efetuar as duas primeiras dessas deformações.

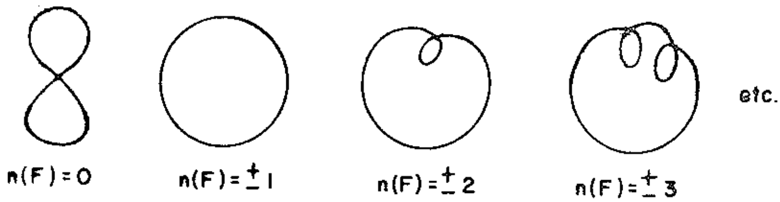

Figura 5

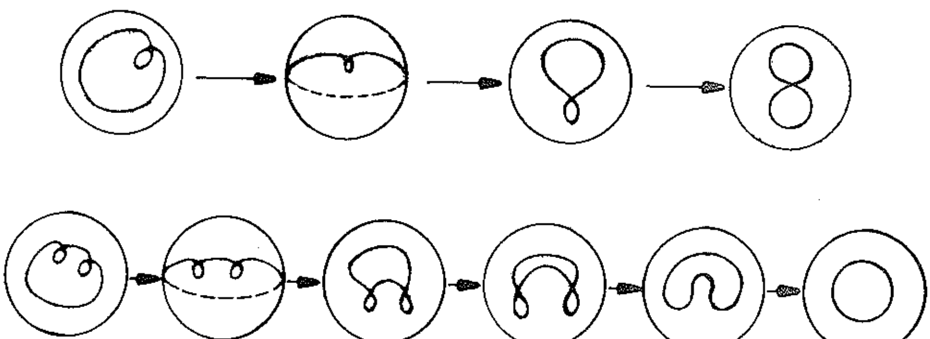

Figura 6

Resta provar que 0 e 8 não são regularmente homotópicas em S^2. Isto requer método mais educados. Seja $SO(3)$ o conjunto das bases ortonormais positivamente orientadas $\{u_1, u_2, u_3\} \subset \mathbb{R}^3$. A cada curva regular $F : [a,b] \to S^2$ corresponde um caminho fechado (laço) $\overline{F} : [a,b] \to SO(3)$, tal que $\overline{F}(t) = \{v_1, v_2, v_3\}$, onde

$$v_1 = F(t), \quad v_2 = F'(t)/|F'(t)| \quad \text{e} \quad v_3 = v_1 \times v_2 \quad \text{(produto vetorial)}.$$

Analogamente, a uma homotopia regular $H : [a,b] \times [0,1] \to S^2$ entre as curvas F e G faremos corresponder uma homotopia

$\overline{H} : [a,b] \times [0,1] \to SO(3)$ entre os laços $\overline{F}$ e $\overline{G}$, pondo $H(t,u) = \overline{H}_u(t)$.

Assim, se as curvas regulares F, $G : [a,b] \to S^2$ forem regularmente homotópicas, os laços correspondentes $\overline{F}, \overline{G} : [a,b] \to SO(3)$ serão homotópicos.

Ora, a curva regular 0 em S^2 pode ser representada pela parametrização $F : [0,2\pi] \to S^2$, $F(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 0)$, enquanto a curva regular 8 é regularmente homotópica em S^2 (como se vê sem dificuldade) à curva dada pela parametrização $G : [0,2\pi] \to S^2$ $G(t) = (\cos 2t, \operatorname{sen} 2t, 0)$.

Os laços correspondentes $\overline{F}, \overline{G} : [0,2\pi] \to SO(3)$ são dados por

$$\overline{F}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t & 0 \\ \operatorname{sen} t & \cos t & 0 \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \quad \overline{G}(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t & 0 \\ sen\, 2t & cos\, 2t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

É bem conhecido que em $SO(3)$ há apenas duas classes de homotopia de laços. Elas são exatamente as classes que contêm os laços $\overline{F}$ e $\overline{G}$ respectivamente, os quais não são homotópicos. (Veja, por exemplo [6], p. 191). Segue-se que 0 e 8 são curvas regulares não regularmente homotópicas em S^2.

Observação: O teorema de Smale, no caso particular da esfera S^2, afirma precisamente que a correspondência $F \dashrightarrow \overline{F}$ induz uma bijeção entre as classes de homotopia regular de curvas em S^2 e as classes de homotopia de laços em $SO(3)$.

Apêndice: Sobre a Função Ângulo

Seja $\varphi : X \to S^1$ definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ e tomando valores no círculo unitário S^1. (No texto, temos $\varphi : [a,b] \to S^1$, dada por $\varphi(t) = F'(t)/|F'(t)|$, onde $F : [a,b] \to \mathbb{R}^2$, é uma curva regular, ou então $\varphi : [a,b] \times [0,1] \to S^1$, dada por $\varphi(t) =$

$H'_u(t,u)/|H'_u(t,u)|$, onde $H : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{R}^2$ é uma homotopia regular.)

Diz-se que $\alpha : X \to \mathbb{R}$ é uma *função ângulo para* φ quando $\varphi(x) = e^{i\alpha(x)} = (\cos\,\alpha(x), \text{sen}\,\alpha(x))$ para todo $x \in X$.

Se a função ângulo α é contínua então φ certamente é também contínua. Mas nem toda aplicação contínua $\varphi : X \to S^1$ admite uma função ângulo contínua. Por exemplo: a aplicação identidade $\varphi : S^1 \to S^1$. Se existisse $\alpha : S^1 \to R$ contínua tal que $z = e^{i\alpha(z)}$ para todo $z \in S^1$ então α seria injetiva. Mas é bem sabido que nenhuma função contínua de S^1 em $\mathbb{R}$ pode ser injetiva.

Se α, $\beta : X \to \mathbb{R}$ forem funções ângulo da mesma aplicação $\varphi : X \to S^1$ então, para cada $x \in X$, tem-se $\cos\alpha(x) = \cos\beta(x)$ e $\text{sen}\alpha(x) = sen\beta(x)$, logo $\beta(x) - \alpha(x)$ é um múltiplo inteiro de 2π. Noutras palavras, $[\beta(x) - \alpha(x)]/2\pi \in \mathbb{Z}$. Se α e β forem contínuas e X for conexo, este número inteiro independe de $x \in X$. Assim, quando X é conexo, duas funções ângulo contínuas da mesma aplicação $\varphi : X \to S^1$ diferem por um múltiplo inteiro constante de 2π.

Quando o conjunto X é simplesmente conexo, toda aplicação contínua $\varphi : X \to S^1$ admite uma função ângulo contínua. Isto resulta do fato de que a aplicação $E : \mathbb{R} \to S^1$, dada por $E(t) = e^{it} = (\cos\,t, \text{sen}\,t)$, é um recobrimento. (Veja, por exemplo, [6], p. 185).

No texto do presente artigo, a existência da função ângulo contínua é utilizada apenas nos casos particulares em que X é o intervalo $[a,b]$ ou o retângulo $[a,b] \times [0,1]$, nos quais a prova é bem mais simples. (Veja, por exemplo, [5], p. 116, Exercício 7.1, ou p. 108.)

Referências

[1] CARMO, MANFREDO P. DO, *Differential Geometry of Curves and Surfaces,* Prentice Hall, Engl. Cliffs, NJ (1976), 396.

[2] K. FRANCIS, GEORGE, *A Topological Picturebook,* Springer-Verlag, 1987.

[3] M. HIRSCH, *Immersions of manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc., Vol. 93 (1959), 242-276.

[4] H. HOPF, *Uber die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven,* Compositio Math. 2 (1935), 5062.

[5] E. LIMA, *Curso de Análise Vol. 2,* Projeto Euclides (segunda Edição) RJ, 1985.

[6] E. LIMA, *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento,* IMPA (1977), 152.

[7] MAX, NELSON, *Turning a Sphere Inside Out,* International Film Bureau Chicago, 1987.

[8] S. SMALE, *The classification of immersions of spheres in Euclidian Spaces,* Ann. of Math. (2) 69 (1959), 327-344.

[9] S. SMALE, *Regular curves on Riemannian Manifolds,* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 87 (1958).

[10] S. SMALE, *A classification of immersions of the two-sphere,* Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 90 (1959), 281-290.

[11] E. SPANIER, *Algebraic Topology,* MacGraw Hill, New York (1966), 67.

[12] H. WHITNEY, *On regular closed curves in the plane,* Compostio Math. Vol. 4 (1937), 276-284.