

## Uma Demonstração Elementar do Teorema da Amizade

*Mario A. Casarin Jr.*

e

*Carlos Tomei*

Departamento de Matemática, PUC - RJ  
Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea  
22.453 - Rio de Janeiro, RJ

O teorema do título foi chamado assim por H. Wilf, que o demonstrou utilizando resultados em geometrias projetivas finitas [1]. Seu enunciado é o seguinte:

Considere uma festa com  $n$  pessoas onde cada duas pessoas têm exatamente um amigo comum. Então alguém conhece todas as outras pessoas da festa.

A primeira demonstração do teorema da amizade é de G. Higman [2]. O Prof. Sóstenes Lins, do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco, sugeriu o problema de encontrar uma demonstração elementar desse resultado, cujo enunciado, afinal, é tão fácil de entender. A demonstração abaixo só emprega fatos básicos sobre autovalores e autovetores. O argumento é um exemplo típico do uso de álgebra linear em combinatória.

A demonstração consiste numa sequência de pequenos resultados intermediários; o último passo é o único que não é completamente elementar. Vale a pena acompanhar os argumentos com uma figura (precisamente, um grafo): represente as pessoas na festa por pontos e ligue-os com um traço se as pessoas se conhecem.

A relação de amizade nesse problema é simétrica (se  $i$  conhece

$j$ , então  $j$  conhece  $i$ ) e irreflexiva (ninguém conhece a si mesmo, infelizmente talvez).

Começamos numerando as pessoas na festa de um modo conveniente. Atribua o número 1 a uma pessoa qualquer. Seja  $A_1$  o conjunto de conhecidos de 1. Se  $A_1$  é vazio, a festa tem uma só pessoa e o teorema está demonstrado. Se não, atribua o número 2 a uma pessoa qualquer em  $A_1$  (em palavras, 2 é um amigo qualquer de 1). Chame de 3 o único amigo comum a 1 e 2. Se existir uma outra pessoa em  $A_1$ , chame-a de 4, e 5 vai ser o único amigo comum de 1 e 4 (5 não pode ser 2, senão 1 e 2 teriam dois amigos comuns, 3 e 4; do mesmo modo, 5 não pode ser 3). O argumento pode ser repetido, e obtemos a afirmação a seguir.

A.)  $A_1$  tem um número de elementos, digamos,  $2k$ , divididos em pares de pessoas amigas que conhecem 1.

Para cada  $i$  amigo de 1, vamos chamar de  $A_i$  o conjunto de amigos de  $i$  diferentes de 1 e do amigo comum a  $i$  e 1. Os conjuntos  $A_i$  podem ser vazios.

B.) Os conjuntos  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 2k + 1$  formam uma partição do conjunto das pessoas da festa diferentes de 1. Isto é,

B1.) os conjuntos são disjuntos, para  $i$  diferente de  $j$ , ambos diferentes de 1, uma pessoa  $p$  em  $A_i$  e  $A_j$  seria um amigo comum de  $i$  e  $j$  diferente de 1; da mesma forma, uma pessoa  $p$  em  $A_1$  e  $A_i$  ( $i$  diferente de 1) seria um amigo comum a  $i$  e 1, diferente daquele em  $A_1$ , por construção;

B2.) se  $j$  não é 1, então  $j$  pertence a algum  $A_i$ , de fato, se  $j$  é amigo de 1, então  $j$  está em  $A_1$ ; se  $j$  não é amigo de 1,  $j$  está em  $A_i$ , onde  $i$  é o amigo comum a  $j$  e 1.

C.) Do mesmo modo como numeramos as pessoas em  $A_1$ , é possível numerar sucessivamente as pessoas em  $A_2$ ,  $A_3$ , etc. de modo a concluir que todos esses conjuntos têm um número par de pessoas.

D.) Para  $i$  entre 2 e  $2k + 1$ , ninguém em  $A_i$  conhece 1. Todos os amigos de  $i$  são 1, seu amigo comum a 1 e as pessoas em  $A_i$ . Esses fatos são conseqüências imediatas da definição dos conjuntos

$A_i$ .

E.) Se alguém na festa (chamemo-lo 1) conhece exatamente duas pessoas, então  $A_2$  ou  $A_3$  devem ser vazios.

De fato, a lista de pessoas na festa é 1,  $A_1$  (as pessoas 2 e 3),  $A_2$  e  $A_3$ . O amigo comum de  $p$  em  $A_2$  e  $q$  em  $A_3$  não pode ser 1 (ninguém em  $A_2$  ou  $A_3$  conhece 1), 2 (se não, 2 e 3 conhecem 1 e  $q$  em comum) ou 3 (por quê?). Logo, o amigo comum de  $p$  e  $q$  está em  $A_2$  ou  $A_3$ , em particular, existem duas pessoas diferentes,  $r$  em  $A_2$  e  $s$  em  $A_3$ , que se conhecem. Mas então 2 e  $s$  têm dois amigos em comum, 3 e  $r$ .

F.) Se alguém na festa conhece exatamente duas pessoas, o teorema está demonstrado.

Por E.) e B.), um amigo dessa pessoa conhece todos na festa.

Basta, então, demonstrar o teorema para festas cujos participantes têm pelo menos quatro amigos (as festas nas quais alguém não tem amigos só têm uma pessoa, e o teorema está satisfeito por vacuidade).

G.) Se  $i$  e  $j$  são dois amigos de 1 que não se conhecem, então  $i$  e  $j$  têm o mesmo número de amigos (ou,  $A_i$  e  $A_j$  têm o mesmo número de elementos).

Vamos supor inicialmente que  $A_i$  e  $A_j$  não são vazios. Note que o único amigo comum  $p$  entre  $i$  e uma pessoa  $q$  em  $A_j$  é uma pessoa em  $A_i$  ( $p$  não pode ser 1, porque ninguém em  $A_j$  conhece 1, para  $j$  entre 2 e  $2k+1$ ; e  $p$  não pode ser  $r$ , o amigo comum a  $i$  e 1, senão  $j$  e  $r$  teriam dois amigos comuns, 1 e  $q$ ). Além disso, pessoas diferentes em  $A_j$  têm amigos comuns a  $i$  diferentes em  $A_i$  (se o amigo comum  $s$  fosse o mesmo,  $j$  e  $s$  teriam dois amigos comuns diferentes). Logo, o número de pessoas em  $A_j$  é menor ou igual ao número de pessoas em  $A_i$ . O argumento pode ser simetrizado, e concluímos que  $A_i$  e  $A_j$  contêm o mesmo número de pessoas, para  $i$  e  $j$  entre 2 e  $2k+1$ . Se, por outro lado,  $A_j$  é vazio,  $A_i$  tem que ser vazio também:  $j$  não pode ter amigos comuns com as pessoas em  $A_i$  (por quê? Leitor, não pare de desenhar figuras). Por simetria, a afirmativa G.) está provada.

H.) Todos os conjuntos  $A_i$ , para  $i$  entre 2 e  $2k + 1$ , têm o mesmo número de elementos.

Por G.), se  $i$  e  $j$  em  $A_1$  não se conhecem (1 tem pelo menos quatro amigos),

$A_i$  e  $A_j$  têm o mesmo número de pessoas. O amigo comum  $h$  a  $i$  e 1 não conhece  $j$  logo  $A_h$  e  $A_j$  têm o mesmo número de pessoas.

Note que a escolha da pessoa que chamamos de 1 foi totalmente arbitrária. Logo, podemos supor que, dada uma pessoa com mais de dois amigos, todos os seus amigos conhecem o mesmo número de pessoas.

I.) Todas as pessoas nessas festas têm o mesmo número de amigos. Fácilmo: duas pessoas arbitrárias  $p$  e  $q$  tem um amigo comum  $r$ , que conhece mais de duas pessoas, o resultado segue da hipótese acrescentada entre F.) e G.).

O último passo exige uma certa preparação. Vamos supor que todas as pessoas na festa têm  $2k$  amigos. Numere-as, de 1 a  $n = 4k^2 - 2k + 1$  (por quê? Note que  $n$  é  $1 + 2k + 2k(2k - 2)$ ). Considere a matriz ("de adjacência")  $M$ ,  $n$  por  $n$ , dada por  $M_{ij} = 1$ , se  $i$  e  $j$  se conhecem, ou  $M_{ij} = 0$ , caso contrário. Então  $M$  é uma matriz simétrica, e todos os elementos na diagonal são iguais a 0. Note que os elementos iguais a 1 na linha  $i$  correspondem aos amigos de  $i$ . Os elementos da matriz  $M^2$  têm uma propriedade interessante:  $(M^2)_{ij}$  é o número de amigos comuns de  $i$  e  $j$  (ou, pensando em termos de grafos, o número de caminhos de comprimento 2 ligando  $i$  a  $j$ ). Para ver isso, basta ler a definição de produto de matrizes:

$$(M^2)_{ij} = \sum_{h=1}^n M_{ih}M_{hj}$$

e essa expressão conta justamente quantos  $h$  são amigos de  $i$  e  $j$ . Das hipóteses, todos os elementos de  $M^2$  fora da diagonal são iguais a 1 (duas pessoas têm um único amigo em comum), e todos os elementos na diagonal são iguais a  $2k$  (todas as pessoas têm o mesmo número de amigos,  $2k$ ). É fácil calcular os autovalores e

autovetores da matriz  $M^2$ : escreva  $M^2 = U + (2k - 1)I$ , onde  $U$  é a matriz com todos os elementos iguais a 1, e  $I$  é a identidade. O vetor  $v$  cujas coordenadas são todas iguais a 1 é um autovetor de  $U$  associado ao autovalor  $n$ . Qualquer vetor ortogonal a  $v$  está no núcleo de  $U$ . Resumindo, os autovalores de  $U$  são  $n$  e 0 ( $n - 1$  vezes). Então os autovalores de  $M^2$  são  $n + 2k - 1$  e  $2k - 1$  ( $n - 1$  vezes). O teorema da amizade é consequência imediata da afirmação abaixo.

J.) A única festa satisfazendo as hipóteses do teorema na qual todos os participantes conhecem o mesmo número de amigos só tem três pessoas (e, para ela, o teorema é obviamente verdadeiro). Os autovalores da matriz  $M$  devem ser raízes quadradas (positivas ou negativas) dos autovalores da matriz  $M^2$ , afinal, os autovalores de  $M^2$  são o quadrado dos autovalores de  $M$ . Como a diagonal de  $M$  só contém zeros, o traço de  $M$  é 0, assim como a soma de seus autovalores. Isto é, existe um inteiro  $a$  tal que

$$a \cdot \sqrt{2k - 1} = \sqrt{n + 2k - 1}.$$

Simplificando, devemos ter

$$a^2(2k - 1) = n + 2k - 1$$

o que obriga  $k = 1$  (por quê? Pense nos primos dividindo  $2k - 1$ ).

## Referências

- [1] H. S. WILF, *The Friendship Theorem*, Combinatorial Mathematics and Its Applications, Proc. Conf. Oxford, 1969, Academic Press, London, 1969.
- [2] G. HIGMAN, Conferencia no encontro "Combinatorial Mathematics and Its Applications", Oxford, 1969.