

# A Distribuição dos Números Primos

*José Felipe Voloch*

Instituto de Matemática Pura e Aplicada – CNPq

Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico

22.460 – Rio de Janeiro, RJ

Um número  $p > 1$  chama-se *primo* quando os únicos inteiros que o dividem (sem deixar resto) são 1 e o próprio  $p$ . Os números primos são fundamentais no estudo das propriedades dos números inteiros já que todo inteiro é produto de números primos, de maneira única a menos da ordem dos fatores. Este é o chamado teorema fundamental da Aritmética.

Estaremos interessados aqui na distribuição dos números primos entre os inteiros. Mais precisamente, se  $x \geq 2$  é um número real, denotaremos por  $\pi(x)$  o número de primos no intervalo  $[2, x]$ . Neste artigo, vamos descrever as investigações de Euler e Riemann, as quais foram culminadas pelos trabalhos de Hadamard e de la Vallée Poussin, que determinaram o comportamento assintótico da função  $\pi(x)$ .

## 1. Três Demonstrações do Teorema de Euclides

Euclides, nos seus Elementos ( $\pm 300AC$ ), provou que o conjunto dos números primos é infinito, isto é, que  $\pi(x) \rightarrow +\infty$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . Vamos ver três provas deste resultado e depois analisá-las com mais cuidado para obter outras informações sobre  $\pi(x)$ .

A primeira prova é a do próprio Euclides, a qual foi considerada por Hardy uma das mais belas demonstrações da Matemática (ver [3]).

Suponhamos, por absurdo, que existisse apenas um número finito de primos  $p_1, \dots, p_m$ . Então, seja  $N = p_1 \cdot \dots \cdot p_m + 1$ . O inteiro  $N$  se escreve como produto de números primos, logo há um primo  $p$  que o divide. Pela hipótese  $p$  é um dos  $p_i$ 's, logo divide  $p_1 \cdot \dots \cdot p_m = N - 1$ . Segue que  $p$  divide  $N - (N - 1) = 1$ . Isso é um absurdo, o que mostra que o conjunto de primos é infinito.

Para a segunda demonstração, suponha novamente que  $p_1, \dots, p_m$  são todos os números primos. Seja  $x \geq 2$ , um número real. Se  $n$  é um inteiro,  $n \leq x$ , podemos escrever  $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot p_m^{\alpha_m}$  e temos

$$\sum \alpha_i \log p_i = \log n \leq \log x.$$

Logo,

$$\alpha_i \leq \log x / \log p_i \leq \log x / \log 2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Temos então, no máximo  $\log x / \log 2 + 1$  escolhas para o inteiro  $\alpha_i$  e, conseqüentemente,  $(\frac{\log x}{\log 2} + 1)^m$  escolhas para  $n$ . Como há, pelo menos,  $x - 1$  inteiros  $n \leq x$ , temos  $x - 1 \leq (\log x / \log 2 + 1)^m$ . Isso é um absurdo para  $x$  suficientemente grande, já que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x / (\log x)^m = +\infty,$$

qualquer que seja  $m$ .

A terceira demonstração, devida a Euler, apontou a direção para todos os desenvolvimentos subsequentes. Suponha, pela última vez, que  $p_1, \dots, p_m$  são todos os primos e considere o produto de séries infinitas

$$P = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_1^n} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_2^n} \right) \cdots \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p_m^n} \right).$$

Como cada termo do produto converge, já que é série geométrica de soma  $(1 - 1/p_i)^{-1}$ , podemos expandir  $P$ , obtendo

$$P = \sum_{n_1, \dots, n_m = 0}^{\infty} \frac{1}{p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}}.$$

Como cada inteiro é representado, de maneira única, como  $p_1^{n_1} \cdots p_m^{n_m}$ , temos que  $P = \sum_{i=1}^{\infty} 1/n$ . Mas sabemos que esta série,

a série harmônica, diverge. Chegamos novamente a um absurdo, provando mais uma vez que o conjunto dos primos é infinito.

Vamos reconsiderar as demonstrações acima. A primeira demonstração nos dá muito pouco. Disponhamos os números primos na ordem ascendente  $2 = p_1 < p_2 < \dots$ . A prova de Euclides nos diz que existe um primo  $p \neq p_1, \dots, p_m$ , o qual divide  $p_1 \cdots p_m + 1$  logo  $p_{m+1} \leq p_1 \cdots p_m + 1$ . Vamos supor, por indução, que  $p_i \leq 2^{2^i}$ ,  $i \leq m$ , então:

$$p_{m+1} \leq p_1 \cdots p_m + 1 \leq 2^{2+4+\dots+2^m} + 1 < 2^{2^{m+1}} + 1.$$

Logo  $p_{m+1} \leq 2^{2^{m+1}}$ . Segue que  $p_n \leq 2^{2^n}$  para todo  $n$ . Se  $2^{2^n} \leq x < 2^{2^{n+1}}$  então  $\pi(x) \geq \pi(2^{2^n}) \geq \pi(p_n) = n$  e  $n \geq \log_2(\log_2 x)$ , logo  $\pi(x) \geq \log_2(\log_2 x)$ .

A segunda demonstração nos dá uma desigualdade um pouquinho melhor. De fato, se  $p_1, \dots, p_m$  são todos os primos  $\leq x$  (e logo  $m = \pi(x)$ ), a segunda prova nos dá que

$$x - 1 \leq \left( \frac{\log x}{\log 2} + 1 \right)^m.$$

Daí concluímos que

$$\pi(x) \geq \log(x-1) / \log\left(\frac{\log x}{\log 2} + 1\right).$$

A demonstração de Euler dá muito mais informação, mas é mais difícil extraí-la. Na próxima seção começaremos a analisar a prova de Euler.

## 2. A Fórmula do Produto de Euler

Seja  $s > 1$  um número real. Tomemos o produto, para todos os primos  $p$ , das séries  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/p^{ns}$ . Esse produto vai convergir e, pelo mesmo argumento de prova da Euler, obtemos a chamada *fórmula do produto de Euler*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s = \prod_p \sum_{n=0}^{\infty} 1/p^{ns} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}. \quad (1)$$

O símbolo  $\prod_p$  denota o produto sobre todos os primos. A função  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$  é conhecida como a *função zeta de Riemann*, por causa do estudo profundo que Riemann fez dela, o qual veremos mais adiante.

Antes de explorar (1) para obter informações sobre  $\pi(x)$ , vamos estudar  $\zeta(s)$  um pouco. Temos que (faça um desenho para se convencer)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \geq \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{s-1}.$$

Logo  $\zeta(s) \rightarrow +\infty$  quando  $s \rightarrow 1^+$ , como era de se esperar, já que  $\sum 1/n$  diverge.

Por outro lado, pela fórmula de Euler (1), temos

$$\log \zeta(s) = - \sum_p \log(1 - p^{-s}).$$

Usando agora que

$$\log(1 - x) = - \sum_{n=1}^{\infty} x^n/n, \quad \text{para } |x| < 1,$$

temos

$$\log \zeta(s) = \sum_p \sum_{n=1}^{\infty} 1/np^{ns} = \sum_p 1/p^s + \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}. \quad (2)$$

Vamos mostrar que  $\sum_p \sum_{n=2}^{\infty} 1/np^{ns}$  é limitado para  $s > 1$ . De fato, para  $s > 1$ , temos

$$\begin{aligned} \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}} &\leq \sum_p \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{p^{ns}} = \\ &= \sum_p \frac{1}{p^{2s}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \leq 2 \sum_p \frac{1}{p^{2s}} \leq \\ &\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 2\zeta(2). \end{aligned}$$

Pelo que já vimos, temos que  $\log \zeta(s) \rightarrow +\infty$  quando  $s \rightarrow 1^+$ . Conseqüentemente, segue de (2) e do resultado acima

que  $\sum 1/p^s \rightarrow +\infty$  quando  $s \rightarrow 1^+$ . Daí segue, por exemplo que  $\sum 1/p$  diverge pois, caso contrário, teríamos  $\sum 1/p^s \leq \sum 1/p$  para  $s > 1$ .

Para obter informações sobre  $\pi(x)$  notamos que  $\pi(n) - \pi(n-1)$  vale 1 se  $n$  é primo e zero caso contrário, logo

$$\begin{aligned} \sum_p \frac{1}{p^s} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n) - \pi(n-1)}{n^s} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi(n) \left( \frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^{s+1}}. \end{aligned}$$

Se tivéssemos, por exemplo,  $\pi(n) \leq n^\alpha$  para algum  $\alpha < 1$ , a série  $\sum \pi(n)/n^2$  convergiria contrariando a divergência de  $\sum 1/p$ , logo a desigualdade  $\pi(n) \leq n^\alpha$  não pode ser válida para nenhum  $\alpha < 1$ .

### 3. Um Raciocínio Informal

Antes de prosseguir no nosso estudo da função zeta, vamos fazer um raciocínio informal que nos conduzirá a conjecturar a ordem de magnitude da função  $\pi(x)$ .

Já que existem aproximadamente  $x/p$  inteiros divisíveis por  $p$  menores ou iguais a  $x$ , qualquer que seja  $x \geq 2$ , podemos dizer que a probabilidade de um inteiro ser divisível por  $p$  é  $1/p$ . Logo a probabilidade de um inteiro não ser divisível por  $p$  é  $1 - 1/p$ . Se essas probabilidades fossem independentes (na realidade elas não são mas "quase são") concluiríamos que a probabilidade de um inteiro  $\leq x$  ser primo seria  $\prod_{p \leq x} (1 - 1/p)$ . Por um raciocínio análogo aos feitos anteriormente

$$\prod_{p \leq x} (1 - 1/p)^{-1} \geq \sum_{n \leq x} 1/n \quad \text{e} \quad \sum_{n \leq x} 1/n \geq \int_1^x \frac{dt}{t} = \log x.$$

Concluiríamos então que a probabilidade de um inteiro  $\leq x$  ser primo é, no máximo  $1/\log x$ , ou que  $\pi(x) \leq x/\log x$ . Isso não é verdade, mas quase é. De fato, Gauss e Legendre conjecturaram no final do século XVIII e Hadamard e de la Vallée Poussin provaram,

no final do século XIX, que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1. \quad (3)$$

Esse fato é conhecido como o *Teorema dos Números Primos*.

A prova do teorema dos números primos, isto é, (3), devida a Hadamard e de la Vallée Poussin, foi feita elaborando idéias fundamentais de Riemann. O leitor já deve estar convencido da importância da função zeta e da identidade (1). O que Riemann fez foi estudar a função zeta como função de variável complexa.

#### 4. A Função Zeta de Riemann

A *função zeta* é definida para uma variável complexa  $s$ , na região  $\text{Re } s > 1$  ( $\text{Re}$  = parte real) pela série convergente  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} 1/n^s$ . A função zeta é holomorfa nessa região e a fórmula de Euler (1) vale para todo  $s \in \mathbb{C}$  com  $\text{Re } s > 1$ . Vamos primeiramente estender  $\zeta(s)$  para  $\text{Re } s > 0$ . Para isso temos as seguintes identidades

$$\frac{1}{2^{s-1}} \zeta(z) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s},$$

$$(1 - \frac{1}{2^{s-1}}) \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$$

A última série converge para  $\text{Re } s > 0$  e podemos definir  $\zeta(s)$  para  $\text{Re } s > 0$  pela igualdade acima. Não é difícil mostrar que  $\zeta(s)$  é holomorfa em  $\text{Re } s > 0$  exceto por um polo simples em  $s = 2$ , de resíduo 1 (é só imitar a prova acima de que  $\zeta(z) \geq 1/s - 1$  para  $s > 1$ ,  $s$  real).

O primeiro resultado fundamental mostrado por Riemann foi que  $\zeta(s)$  satisfaz a seguinte equação funcional (ver [1] Ch 8 ou [2] Ch 1, para uma prova). Se  $0 < \text{Re } s < 1$ , então:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s). \quad (4)$$

O lado direito de (4) está definido para  $\text{Re } s > 0$ , logo podemos usar (4) para continuar analiticamente  $\zeta(s)$  para todo o plano

complexo obtendo uma função meromorfa em  $\mathcal{C}$  com um único polo em  $s = 1$ .

Riemann prosseguiu, obtendo uma fórmula explícita para  $\pi(x)$  em termos dos zeros de função zeta. Vamos esboçar a prova de uma fórmula análoga para a função  $\psi(x)$ , que será definida a seguir, que é mais simples que a fórmula original de Riemann e serve para os mesmo propósitos.

Sejam  $\Lambda : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $\psi : [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{se } n = p^r, p \text{ primo} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

A fórmula explícita então se escreve, denotando por  $L = \{\lambda \in \mathcal{C} \mid \zeta(\lambda) = 0 \text{ e } 0 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 1\}$ ,

$$\psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log(1 - x^{-2}) - \sum_{\lambda \in L} \frac{x^\lambda}{\lambda}, \quad (5)$$

válida para todo  $x$  real,  $x \geq 2$ ,  $x \notin \mathbb{N}$ .

Vamos agora dar uma idéia da prova de (5) omitindo alguns detalhes técnicos que podem ser vistos em [1] Ch 17 ou [2] Ch 3.

Para isso usaremos a seguinte fórmula, válida para  $c$  real,  $c > 0$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{x^s}{s} ds = \begin{cases} 1, & x = 1. \\ 0, & 0 < x < 1. \end{cases} \quad (6)$$

Para provar (6), seja primeiramente  $x > 1$ . Faça o caminho de integração ir para a esquerda fazendo  $c \rightarrow -\infty$ . O integrando tem um polo em  $s = 0$  de resíduo 1, que deverá ser contado, pelo Teorema dos Resíduos. Quando  $\operatorname{Re} s \rightarrow -\infty$  o integrando tende a zero, logo (6) segue para  $x > 1$ . Quando  $0 < x < 1$ , fazemos o caminho de integração ir para a direita, fazendo  $c \rightarrow +\infty$ . O integrando tende a zero quando  $\operatorname{Re} s \rightarrow +\infty$  e não passamos por nenhum polo do integrando. O resultado novamente segue do

teorema dos resíduos.

Passemos a prova de (5). Primeiramente, para  $\text{Re } s > 1$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} &= \frac{d}{ds} \log \zeta(s) = \frac{d}{ds} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{1}{np^{ns}} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p -\frac{\log p^n}{np^{ns}} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{-\log p}{p^{ns}} = -\sum \frac{\Lambda(n)}{n^s}. \end{aligned}$$

Vamos utilizar (6) para extrair (5) desta última fórmula. Sejam  $c > 1$  e  $x \geq 2$ ,  $x \notin N$ . Então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^s}{s} ds &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} \frac{x^s}{s} ds = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{2\pi i} \int_{c-1\infty}^{c+i\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{s}{\lambda}} \frac{ds}{s} = \psi(x). \end{aligned}$$

Na última igualdade usamos (6).

Vamos agora fazer o caminho de integração ir para a esquerda fazendo  $i \rightarrow -\infty$ , como na prova de (6). Pode-se mostrar que o integrado tende a zero quando  $\text{Re } s \rightarrow -\infty$ . Como na prova de (6) vamos aplicar o Teorema dos Resíduos e para isso temos que ver os polos do integrando e os resíduos correspondentes. Os polos são  $s = 0$ ,  $s = 1$  e os zeros de  $\zeta(s)$ . Os resíduos são

$$\begin{aligned} s = 0 & \quad -\zeta'(0)/\zeta(0) \\ s = 1 & \quad x \\ \zeta(\lambda) = 0 & \quad -x^\lambda/\lambda. \end{aligned}$$

Logo, se  $x \geq 2$ ,  $x \notin N$ , temos

$$\psi(x) = x - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \sum_{\zeta(\lambda)=0} \frac{x^\lambda}{\lambda}.$$

Falta agora analisar os zeros da função zeta. Da fórmula de Euler (1), segue que  $\zeta(s) \neq 0$  para  $\text{Re } s > 1$ . Da equação funcional

(4) segue agora que  $\zeta(s) = 0$  para  $\text{Re } s < 0$  se e só se  $s = -2n$ ,  $n$  inteiro,  $n \geq 1$ . Obtemos disso e da igualdade anterior a fórmula explícita (5).

Convém mencionar que, para a análise da série  $\sum_{\lambda \in L} x^\lambda / \lambda$ , é crucial no resultado de Riemann, o qual diz que  $\#\{\lambda \in L \mid |\text{Im } \lambda| \leq T\}$  é aproximadamente  $T/\pi \log(T/2\pi)$  para  $T$  grande. (Ver [1] Ch 15).

Na próxima seção veremos como se deduz o teorema dos números primos a partir de (5).

## 5. O Teorema dos Números Primos e os Zeros da Função Zeta

Começamos por reformular o teorema dos números primos em termos da função  $\psi(x)$ . Seja  $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ . Então

$$\begin{aligned} \theta(x) &\leq \psi(x) = \theta(x) + \sum_{m \geq 2} \sum_{p^m \leq x} \log p \leq \\ &\leq \theta(x) + \sum_{p \leq x^{1/2}} \log x \leq \theta(x) + x^{1/2} \log x. \end{aligned}$$

Também temos que  $\theta(x) \leq \pi(x) \log x$  e se  $\epsilon > 0$  é arbitrário

$$\begin{aligned} \theta(x) &\geq \sum_{x^{1-\epsilon} < p < x} \log p \geq (1-\epsilon) \log x (\pi(x) - \pi(x^{1-\epsilon})) \geq \\ &\geq (1-\epsilon) \pi(x) \log x - x^{1-\epsilon} \log x. \end{aligned}$$

Dessas desigualdades, é fácil concluir que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi(x) \log x}{\psi(x)} = 1.$$

Segue que, para provar o teorema dos números primos, basta provar que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x)/x = 1$ . Para isso, usa-se a fórmula explícita (5). O ponto crucial da prova de Hadamard e de de la Vallée Poussin foi mostrar que  $\zeta(s) \neq 0$  se  $\text{Re } s = 1$ . Disso não é muito difícil concluir que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \left( -\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} - \frac{1}{2} \log(1-x^{-2}) - \sum_{\lambda \in L} \frac{x^\lambda}{\lambda} \right) = 0,$$

o que conclui a prova do teorema dos números primos.

Vamos agora mostrar que  $\zeta(s) \neq 0$  se  $\operatorname{Re} s = 1$ , utilizando um argumento muito elegante devido a Mertens.

Suponha, por absurdo, que  $\zeta(1 + ia) = 0$ . Considere a função  $\zeta(s)^3 \zeta(s + ia)^4 \zeta(s + 2ia) = f(s)$ . O polo simples de  $\zeta(s)$  em  $s = 1$  é cancelado pelo zero de  $\zeta(s + ia)$  em  $s = 1$  com sobras, logo  $f(1) = 0$ . Segue que

$$\lim_{s \rightarrow 1^+} \log |f(s)| = -\infty.$$

Vamos mostrar que  $\log |f(s)| \geq 0$  para  $s > 1$ ,  $s$  real, isso nos levará a um absurdo, provando que  $\zeta(s) \neq 0$  para  $\operatorname{Re} s = 1$ . Lembremos que para  $z \in \mathcal{C}$  temos  $\log |z| = \operatorname{Re}(\log z)$ ; logo para  $s$  real,  $s > 1$ ,

$$\begin{aligned} \log |f(s)| &= \operatorname{Re} \log f(s) \\ &= \operatorname{Re}(3 \log \zeta(s) + 4 \log \zeta(s + ia) + \log \zeta(s + 2ia)) = \\ &= \operatorname{Re} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{3}{np^{ns}} + \frac{4}{np^{n(s+ia)}} + \frac{1}{np^{n(s+2ia)}} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{1}{np^{ns}} \operatorname{Re} \left( 3 + \frac{4}{p^{nia}} + \frac{1}{p^{2nia}} \right) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_p \frac{1}{np^{ns}} (3 + 4 \cos(-na \log p) + \cos(-2na \log p)). \end{aligned}$$

Como  $3 + 4 \cos \theta + \cos 2\theta = 2(1 + \cos \theta)^2 \geq 0$ , concluímos que  $\log |f(s)| \geq 0$ , terminando a demonstração.

A fórmula explícita (5) mostra que a distribuição dos números primos está intimamente ligada à localização dos zeros de  $\zeta(s)$ . Riemann sugeriu que talvez todos os zeros de  $\zeta(s)$  com  $0 < \operatorname{Re} s < 1$  tivessem na verdade  $\operatorname{Re} s = 1/2$ . Essa é a famosa *hipótese de Riemann* que até hoje não foi provada. Pelas inúmeras conseqüências que a hipótese de Riemann tem para a distribuição dos números primos ela é considerada um dos mais importantes problemas em aberto de toda a Matemática, se não o mais importante. Ela figura na famosa lista de 23 problemas de Hilbert.

Uma conseqüência da hipótese de Riemann que decorre de (5) é que  $\psi(x) = x + o(x^{1/2} \log^2 x)$ . (Dizemos que  $f(x) = o(g(x))$  se

$|f(x)|/g(x)$  é limitado). Essa última igualdade é equivalente a

$$\pi(x) = \int_2^x dt/\log t + O(x^{1/2} \log x).$$

A função  $\int_2^x dt/\log t$  é assintótica a  $x/\log x$  e é uma melhor aproximação a  $\pi(x)$ . Reciprocamente quaisquer dessas duas fórmulas assintóticas implica a hipótese de Riemann.

## 6. Alguns Problemas Clássicos

Para terminar, vamos fazer uns raciocínios informais ligados a dois problemas clássicos da Teoria dos Números que podem ser formalizados se soubermos bastante sobre a distribuição dos números primos. Aqui, bastante = um pouco mais que a hipótese de Riemann.

A conjectura de Goldbach afirma que se  $n$  é um inteiro par,  $n \geq 4$ , então  $n$  é a soma de dois números primos. Por exemplo  $4 = 2 + 2$ ,  $6 = 3 + 3$ ,  $8 = 5 + 3$ ,  $10 = 7 + 3$ , etc ... Até onde os cálculos foram efetuados a conjectura foi verificada.

Se  $n$  é par,  $n \geq 4$  seja  $X(n) = \{n - p \mid p \leq n, p \text{ primo}\}$  então  $X(n) \subset [0, n]$  e tem  $\pi(n)$  elementos. Como a probabilidade de um inteiro em  $[0, n]$  ser primo é  $\pi(n)/n$ , aproximadamente  $1/\log n$ , podemos esperar que a probabilidade de um elemento de  $X(n)$  ser primo é  $1/\log n$ . Se isso fosse verdade então  $X(n)$  conteria aproximadamente  $\pi(n)/\log n$  primos e  $n$  seria soma de dois primos de aproximadamente  $n/(\log n)^2$  maneiras. Isso também é confirmado pela evidência numérica. Apesar da conjectura de Goldbach não ter sido provada, Vinogradov mostrou que todo inteiro ímpar é soma de três primos e que o número de maneiras de escrever o número como a soma de três primos é, assintoticamente, o esperado. Sabe-se também que o número de inteiros pares  $\leq x$  que não são soma de dois primos é  $O(n(\log n)^{-A})$ ,  $\forall A > 0$  (para esses resultados ver [4]).

A conjectura dos primos gêmeos afirma que existe uma infinidade de primos  $p$  tais que  $p + 2$  também é primo. Alguns exemplos de tais primos são 5, 17, 29, 101. Considere, para  $x \geq 2$ , o conjunto  $X = \{p - 2 \mid p \text{ primo}, p \leq x\}$ . Então  $X \subset [0, x]$  e tem

$\pi(x)$  elementos. Um argumento análogo ao anterior nos leva a crer que  $X$  contenha aproximadamente  $x/(\log x)^2$  primos, isto é, que existem aproximadamente  $x/(\log x)^2$  primos  $p \leq x$  com  $p+2$  primo. Novamente, isso é confirmado pela evidência numérica e há resultados parciais apontando nessa direção.

O leitor interessado numa discussão histórica dos tópicos tratados nesse artigo deve consultar o belíssimo livro [2], no qual ele irá encontrar as demonstrações completas dos resultados esboçados aqui.

Ao leitor interessado em conhecer os desdobramentos modernos da teoria da distribuição dos primos recomendamos a referência [1].

O artigo [5] discute a evidência numérica, bastante convincente, para a hipótese de Riemann.

## Referências

- [1] H. DAVENPORT, *Multiplicative Number Theory*, 2<sup>nd</sup> edition, Springer, 1980.
- [2] H. M. EDWARDS, *Riemann's zeta function*, Academic Press, 1974.
- [3] G. H. HARDY, *A mathematician's apology*, Cambridge Univ. Press, 1940.
- [4] R. C. VAUGHAN, *The Hardy-Littlewood method*, Cambridge Univ. 1981.
- [5] S. WAGON, *Where are the zeros of zeta of  $s$ ?* Math. Intelligencer, Vol. 8, No. 4 (1986), 57-62.