

# O Hipercubo

*Jonas de Miranda Gomes*

Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq  
Estrada Dona Castorina 110, Jardim Botânico  
22.460 - Rio de Janeiro, RJ

e

*Geovan Tavares dos Santos*

Departamento de Matemática, PUC - RJ  
Rua Marquês de São Vicente 225, Gávea  
22.453 - Rio de Janeiro, RJ

## 1.0. Introdução

O *hipercubo* em  $R^4$  é o conjunto de pontos

$$K^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4; -1 \leq x_i \leq 1, i = 1, \dots, 4\}.$$

A definição anterior se refere ao que podemos chamar de *hipercubo sólido*. No caso do cubo em  $R^3$ , seus elementos são classicamente conhecidos por vértices, arestas e faces. No caso do hipercubo é mais conveniente chamar cada elemento genericamente de *face*, e usarmos a dimensão para distinguir os diversos tipos. Assim os *vértices* são faces de dimensão zero, as *arestas* são faces de dimensão um, e as faces propriamente ditas são faces de dimensão dois.

No hipercubo temos faces de dimensão zero, um, dois e três; as faces de dimensão três são cubos sólidos. Elas são obtidas fixando uma das coordenadas iguais a  $\pm 1$  e permitindo que as outras três coordenadas variem, satisfazendo a condição da definição. Temos assim oito faces de dimensão três. As faces de dimensão dois são obtidas fixando duas coordenadas igual a  $\pm 1$ , e deixando que as

outras variem segundo as desigualdades na definição de  $\mathcal{K}^3$ . É fácil verificar que temos 24 faces bidimensionais. Analogamente obtemos as faces de dimensão um (num total de 32) e as faces de dimensão zero (vértices) que totalizam 16.

Em [3] o leitor pode encontrar, com mais detalhes, os fatos acima mencionados sobre o hipercubo.

Neste artigo utilizaremos o computador para obtermos informações sobre  $\mathcal{K}^3$  através de suas projeções no plano  $R^2$ . Esse trabalho foi originalmente realizado por Banchoff-Strauss, e resultou em um filme [2].

## 2.0. O Cubo de $R^3$

Para uma melhor compreensão do estudo que faremos com o hipercubo, estudaremos nesta seção o cubo usual em  $R^3$  cujos vértices têm coordenadas 1 ou  $-1$  (ver Fig. 2.1). Se projetarmos ortogonalmente o cubo de  $R^3$  no plano  $z = 0$  obtemos um quadrado cujos lados são paralelos aos eixos coordenados, e cujo centro é a origem do plano  $R^2$  (ver Fig. 2.2).

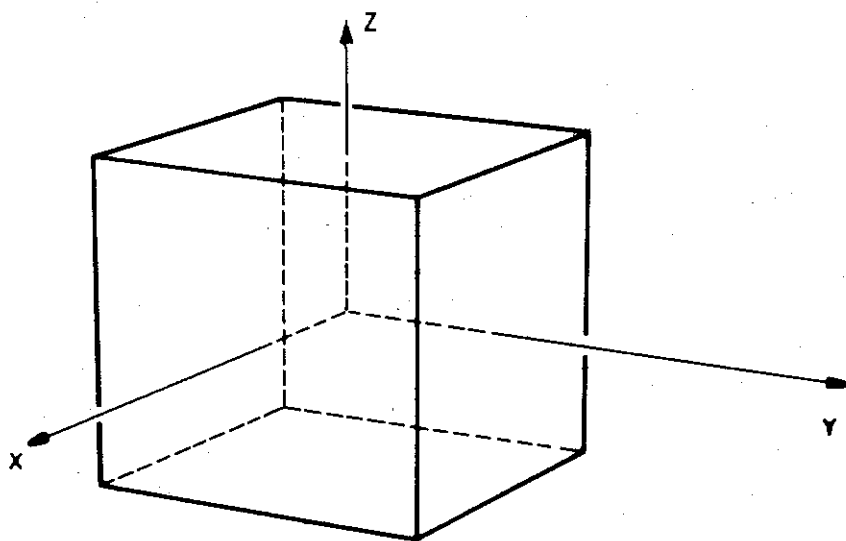
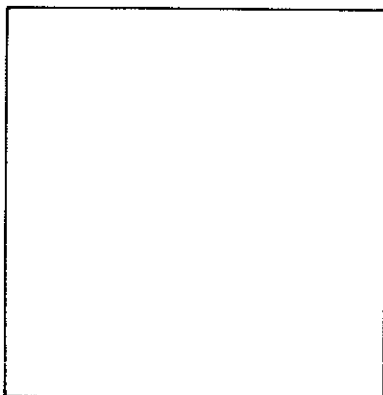


Figura 2.1. O cubo de  $R^3$ .



**Figura 2.2.** Projeção do cubo.

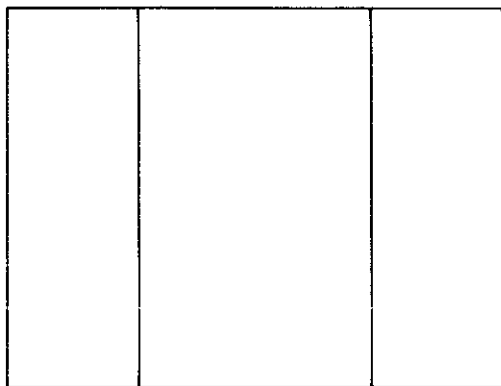
Para obtermos uma melhor visão do cubo devemos fazer uma projeção de modo que as linhas de projeção sejam transversais às faces do cubo, que chamaremos de *projeção genérica*. Podemos obter uma projeção genérica de dois modos distintos: mudando o plano de projeção (plano  $z = 0$ ); ou mudando a posição do cubo. Optamos aqui pelo segundo método.

Sejam  $\alpha$  o ângulo de rotação do cubo em torno do eixo- $x$  e  $\beta$  o ângulo de rotação em torno do eixo- $y$ . Se efetuarmos uma rotação de um ângulo  $\alpha = 20^\circ$  e  $\beta = 0^\circ$ , obtemos a projeção mostrada na figura 2.3.

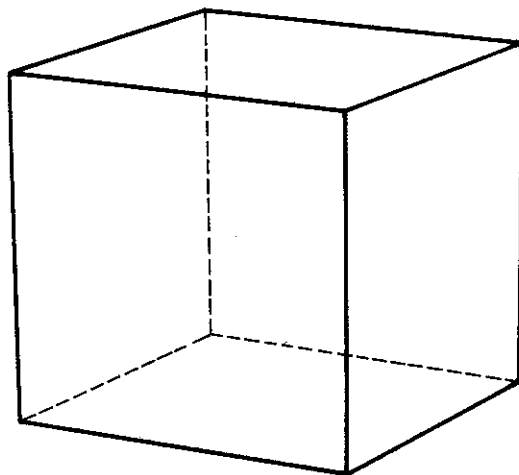
Se efetuarmos também uma rotação de  $20^\circ$  em torno do eixo- $y$  i.e.,  $\beta = 20^\circ$ , a projeção obtida será como indicada na figura 2.4. Essa é uma projeção ortogonal genérica do cubo.

Consideremos agora a diagonal principal do cubo, determinada pelos vértices de coordenadas  $(-1, -1, -1)$  e  $(1, 1, 1)$ . Seja  $P_\ell$  a família de planos ortogonais à reta suporte dessa diagonal, onde o parâmetro  $\ell$  é a distância ao longo dessa reta medida a partir da origem. Para  $\ell_0 \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  qualquer plano  $P_{\ell_0}$ , da família intersecta transversalmente o cubo em um polígono, podendo essa interseção ser um triângulo  $\ell_0 \in (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{6}}{3})$  ou  $\ell_0 \in (+\frac{\sqrt{6}}{3}, \sqrt{3})$ , ou um hexágono  $\ell_0 \in (-\frac{\sqrt{6}}{3}, +\frac{\sqrt{6}}{3})$ . Na figura 2.5 mostramos o

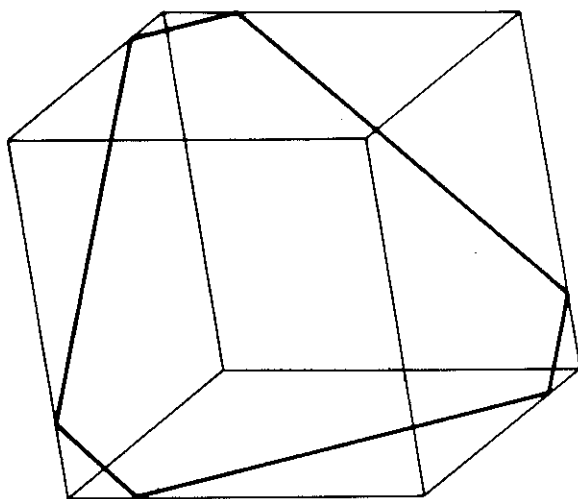
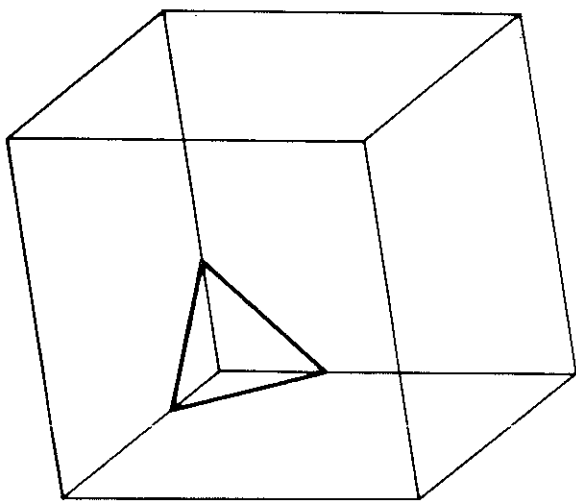
polígono de interseção para quatro valores do parâmetro  $\ell$ .



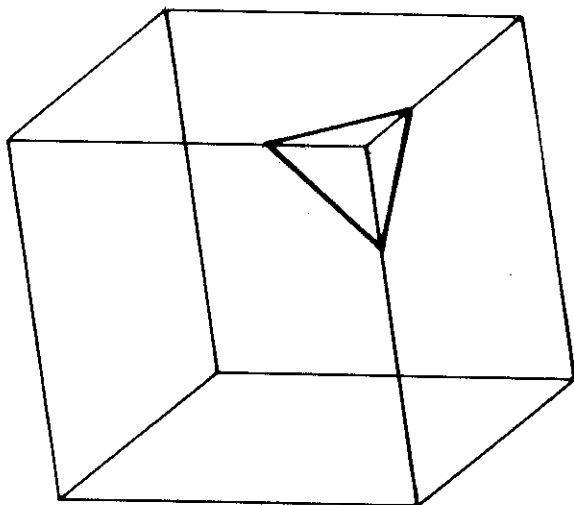
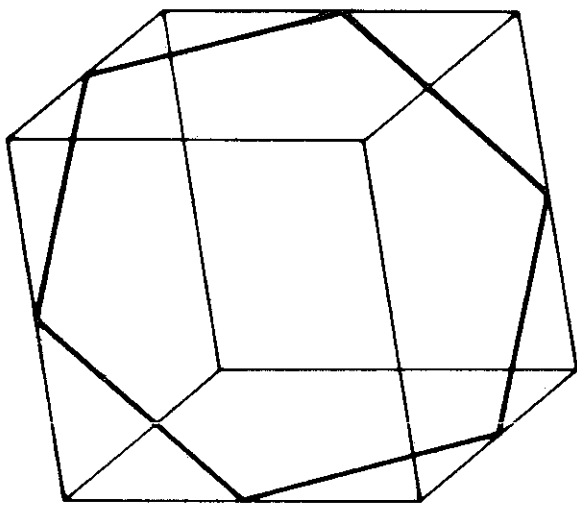
**Figura 2.3.** Projeção do cubo



**Figura 2.4.** Projeção genérica do cubo



**Figura 2.5.** Seções do cubo.



**Figura 2.5.** (Continuação)

### 3.0. O Hiper cubo em $R^4$

Repetiremos nesta seção as construções geométricas da seção anterior para o hiper cubo  $K^3$  em  $R^4$ . Nossa situação é análoga à dos habitantes imaginários de um plano, na tentativa de entender o cubo do espaço de três dimensões.

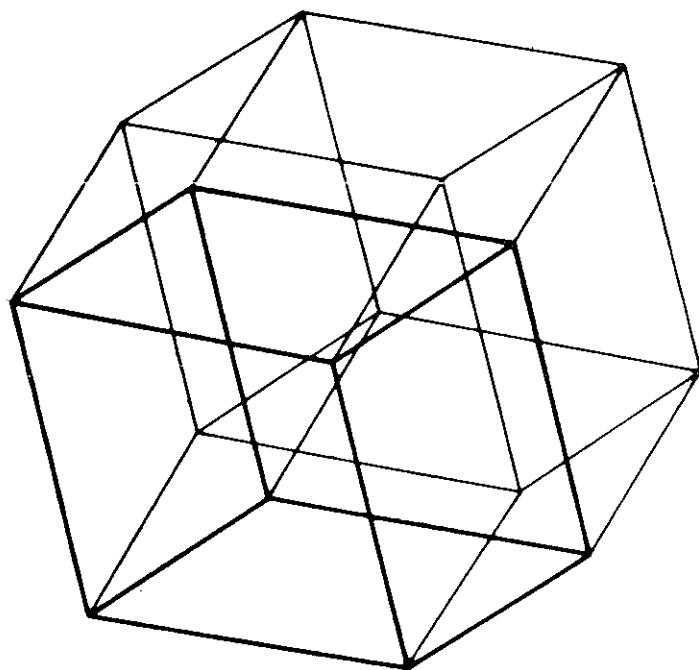
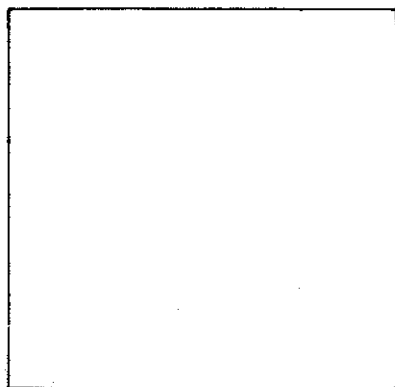
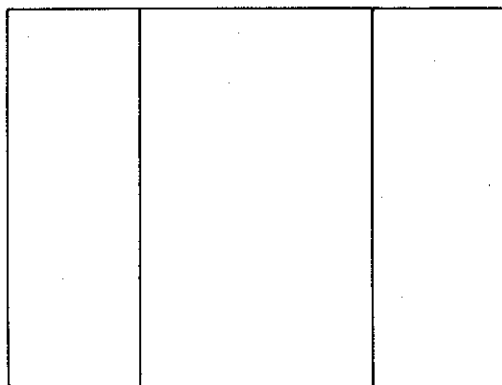


Figura 3.1. Projeção genérica de  $K^3$

De um ponto de vista intuitivo, podemos observar o seguinte: as projeções ortogonais do cubo em  $R^3$  no plano  $R^2$  vistas anteriormente podem ser obtidas por translações do cubo em  $R^2$  (quadrado) no plano. Se fizermos essa translação ao longo de uma direção não paralela a um dos lados obtemos a projeção genérica da fig. 3.1; caso contrário obtemos as projeções dadas nas figuras 3.2 e 3.3. Desse ponto de vista somos levados a intuir que as projeções de  $K^3$  no plano  $R^2$  são obtidas por translações das projeções do cubo de  $R^3$  em  $R^2$ . Podemos pois esperar que a projeção genérica de  $K^3$  seja obtida quando fizermos essa translação em uma direção



**Figura 3.2.**



**Figura 3.3.**

que seja linearmente independente com qualquer projeção das arestas. A imagem obtida nesse caso é mostrada na figura 3.1, onde as linhas mais cheias representam o cubo original que foi trasladado.

Ainda na mesma linha é de se esperar que as projeções não

genéricas de  $\mathcal{K}^3$  sejam como mostradas nas figuras 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5.

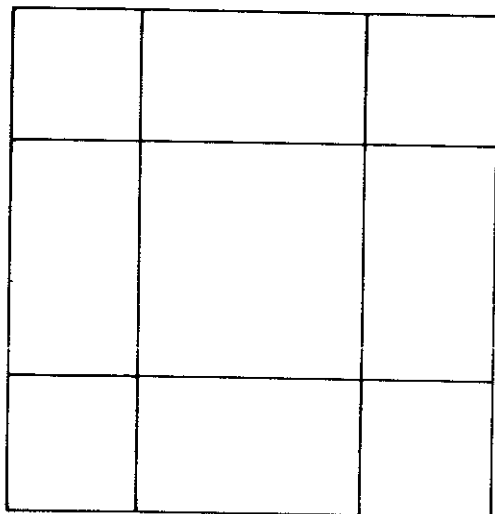


Figura 3.4.

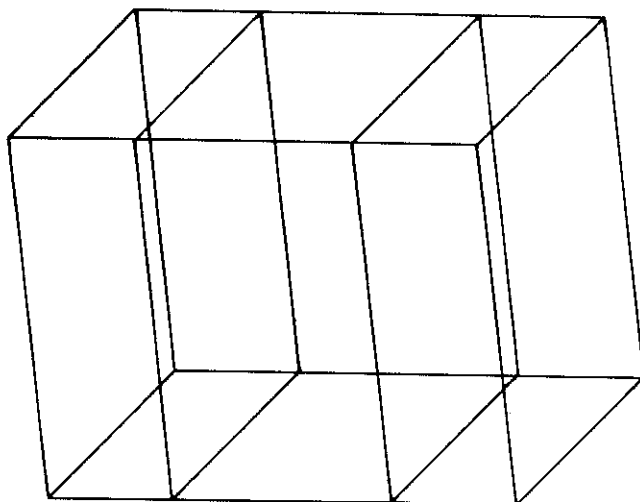


Figura 3.5.

Como fizemos para o cubo em  $R^3$ , podemos programar o computador de modo a obter as projeções ortogonais de  $\mathcal{K}^3$  no plano  $R^2$ . Nesse caso as rotações (que no caso  $R^3$  foram feitas em torno

dos eixos coordenados) serão efetuadas em torno dos planos coordenados  $x_1x_2$ ,  $x_2x_3$ ,  $x_3x_4$ , etc.

Assim, por exemplo, a rotação de ângulo  $\beta$  em torno do plano  $x_3x_4$  é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A matriz de rotação em torno de um plano coordenado  $x_ix_j$  é obtida trocando convenientemente na matriz acima a posição dos elementos que constituem o bloco

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

Como no caso de cubos em  $R^3$ , estamos obtendo a projeção de  $K^3$ , supondo que o computador já tem conhecimento de sua definição. É claro que o modelo do hipercubo deve ser fornecido ao computador juntamente com o programa que determina as projeções. Não entraremos neste detalhe. Apenas observamos que isto é um problema combinatório elementar que envolve apenas conhecimentos rudimentares de Álgebra Linear e Computação Gráfica.

Usaremos a seguinte convenção:  $\beta_{ij}$  é o ângulo de rotação em torno do plano coordenado  $x_ix_j$ . Usando o computador, obtemos então os seguintes resultados:

- a) A figura 3.1 representa realmente a projeção genérica do hipercubo  $K^3$  em  $R^4$ , e neste caso ela foi obtida fazendo as seguintes rotações de  $K^3$ :

$$\beta_{13} = 20^\circ; \beta_{24} = 20^\circ; \beta_{14} = 30^\circ; \beta_{23} = 30^\circ.$$

- b) Na figura 3.2 temos a projeção de  $K^3$  para  $\beta_{ij} = 0$ ,  $(i, j) = (1, 4)$ .

- c) A figura 3.3 é a projeção do hipercubo onde fazemos apenas uma rotação em torno do plano coordenado  $x_1x_3$  de um ângulo de  $20^\circ$ .

- d) A figura 3.4 é a projeção do hipercubo, onde fizemos duas rotações de  $20^\circ$ , uma em torno do plano coordenado  $x_1x_3$ , e outro em torno do plano  $x_2x_4$ .
- e) Na figura 3.5 mostramos a projeção de  $K^3$  efetuando rotações de um ângulo de  $20^\circ$  em torno dos planos coordenados  $x_1x_3$ ,  $x_2x_4$  e  $x_1x_4$ .

Do mesmo modo que procedemos com o cubo em  $R^3$ , podemos tomar a diagonal ligando os pontos de coordenadas  $(-1, -1, -1)$  e  $(1, 1, 1, 1)$ , e estudar as interseções de  $K^3$  com os elementos da família  $P_\ell$  de hiperplanos ortogonais à reta suporte dessa diagonal, onde  $\ell$  é tomado como sendo a distância orientada ao longo da reta suporte da diagonal a partir da origem. Para  $\ell < -2$  ou  $\ell > 2$  o hiperplano  $P_\ell$  não intercepta  $K^3$ . No caso  $\ell = -2$  e  $\ell = 2$  a interseção é apenas um ponto.

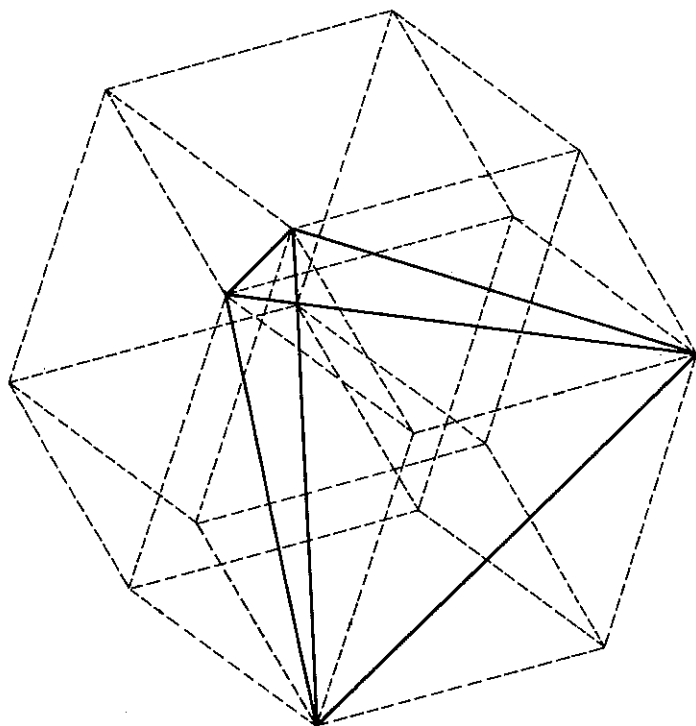


Figura 3.6. Tetraedro da seção de  $K^3$



mos que quando  $\ell$  varia de 0 até 2, obtemos todas as seções encontradas anteriormente para  $\ell$  variando de  $-2$  até 0, porém com as figuras geométricas invertidas.

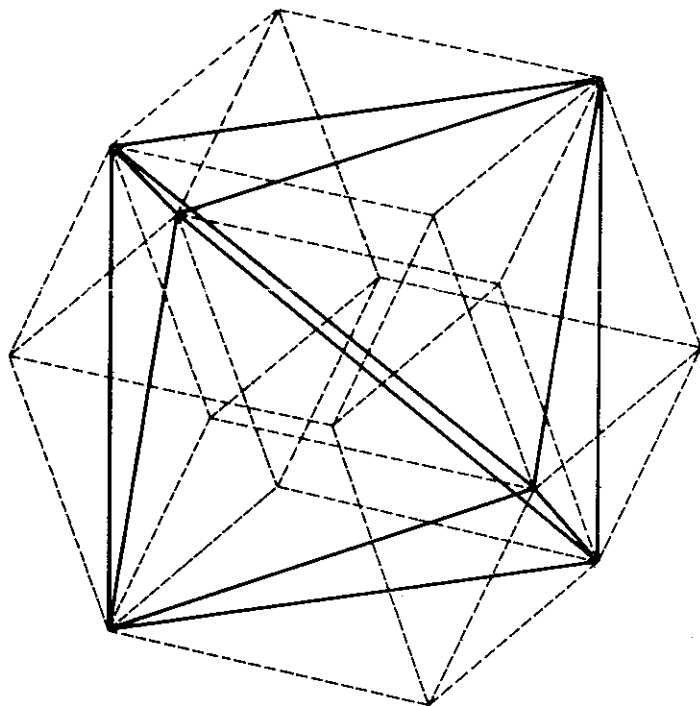


Figura 3.8. Octaedro da seção de  $K^3$

O programa do hipercubo foi implementado usando Fortran 77, com o sistema gráfico GKS no ambiente DOS. Existe também uma implementação feita em Turbo Pascal. O programa pode ser obtido enviando um disquete para um dos editores da seção.

## Referências

- [1] T. BANCHOFF, *Computer Animation and the Geometry of Surfaces in 3 - and 4 - space*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Helsink (1978), 1005-1013.

- [2] T. BANCHOFF; R. STRAUSS, *The Hypercube*, Banchoff-Strauss Prod.
- [3] I. M. GELFAND; E. G. GLAGOLEVA, A. A. KIRILOV. *The Method of Coordinates*, Cambridge, The MIT Press.