Matemática e Computação

Matemática Universitária N. 7, Junho de 1988, 71 - 75.

Comentários

Foi boa a receptividade da seção de Computação e Matemática em MU, o que foi refletido na correspondência recebida, nas perguntas, sugestões e até mesmo em algumas críticas pertinentes.

O artigo sobre o hipercubo mostrou-se adequado para criar a seção devido à sua formulação simples (usa apenas álgebra linear elementar), e a facilidade de implementação (tanto a combinatória quanto a estrutura de dados são simples). O exemplo mostra como podemos utilizar o computador para explorar estruturas matemáticas desconhecidas em dimensões superiores. Outro aspecto importante a ressaltar é que a projeção ortogonal é um método de visualização eficiente e de fácil implementação para manipulação de estruturas matemáticas no computador.

Alguns comentários sobre o texto introdutório da seção de Matemática e Computação do número anterior de MU são pertinentes:

Consideramos o Computador como uma ferramenta na solução de problemas em Matemática, e o comparamos á Topologia, Álgebra, etc. É claro que este conjunto de disciplinas constitui a essência da propria Matemática, porém considerá-las como ferramenta na solução de problemas é uma questão de referencial. Assim, para o geômetra, por exemplo, Ánalise pode ser uma ferramenta de trabalho, dependendo da maneira de abordar um determinado problema. Não devemos esquecer que quando usamos o computador estamos lançando mão de recursos tais como Estrutura de Dados, Computação Gráfica, Programação, e muitos outros que constituem a própria essência da Ciência de Informática. Vale ressaltar que a escolha de uma estrutura de dados correta é muitas vezes o cerne da prova de um resultado matemático.

Usar o computador na solução de um problema vai muito além de sua utilização como lápis e papel, pois o computador não é apenas uma calculadora, mas um instrumento que traz para o auxilio da pesquisa em Matemática toda uma área que, apesar de jovem, tem mudado de modo incisivo a maneira de se pensar e fazer pesquisa nas mais diversas áreas. Observamos ainda que a simulação de um problema no computador serve não apenas para testar conjeturas, mas também pode dar origem a novos tópicos de pesquisa.

A utilização do computador na simulação de problemas em Matemática Pura começa até a mudar o conceito de prova. Como exemplo concreto desse fato podemos citar a solução do problema das quatro cores. Uma prova em Matemática consiste em uma estrutura lógico-dedutiva que nos permite assegurar que uma dada afirmação é verdadeira, a partir de outros resultados já conhecidos. A finalidade de uma prova é pois a de nos convencer, e convencer outras pessoas, da veracidade de uma dada proposição. No computador o matemático pode fazer simulações, verdadeiros experimentos que o levam a se convecer de determinados fatos que, por sua vez, conduzirão a um resultado final. Esse processo pode ser considerado uma prova? Sabemos que o conceito de prova tem mudado ao longo da História. Um processo como o descrito acima poderá ser considerado uma prova daqui a alguns anos?

Que avanços deverão surgir com o advento dessa "Matemática Computacional"? A grande vantagem (como já sabia o matemático John Von Neumaann há quase 50 anos atrás) será o avanço da Matemática no que se refere ao estudo de fenômenos não-lineares.

Em toda a História da Matemática sempre existiram controvérsias sobre algumas demonstrações, e por várias vezes provas incorretas foram detectadas, e esse panorama não deverá se alterar com o surgimento do computador; algumas conclusões obtidas com o seu uso poderão estar incorretas, mas isto de modo algum o invalida como instrumento de pesquisa.

Uma outra questão que não estamos aboradando nessa controvérsia de provas com o uso de computador se refere à sua utilização para fazer demonstrações lógico-dedutivas de teoremas.

Esperamos abordar essa questão futuramente em nossa seção.

Enumeramos no que se segue alguns problemas nas áreas de Sistemas Dinâmicos e Geometria Diferencial que se beneficiaram da utilização do computador na descoberta de novos resultados e na compreensão de outros já anteriormente conhecidos:

1. Sistemas Dinâmicos

Os conjuntos de Julia já eram conhecidos desde 1918 [Ju], porém só com o uso do computador foi possível compreender melhor a sua estrutura, o que contribuiu para a descoberta de novos resultados e o estabelecimento de novas conjeturas. O trabalho pioneiro de B. Mandelbrot auxiliou enormemente ns disseminação dos conjuntos fractais em diversas áreas, o que só foi possível com o uso do computador, em particular de Computação Gráfica [Ma, PeRi]. Os algoritmos envolvidos no estudo de fractais foram recentemente publicados em [PeSa].

O atrator de Lorenz [Lo], descoberto numéricamente em conexão com estudos de previsão do tempo em meteorologia, foi um dos primeiros tópicos descobertos no que se chama hoje Teoria do Caos. Outro estudo pioneiro nessa área foi a atrator de Hénon [He], descoberto com o uso do computador en conexão com problemas de Astronomia.

O trabalho computacional realizado no estudo destes dois atratores contribuiram para a disseminação do uso do computador na área de Sistemas Dinâmicos.

2. Geometria Diferencial

O pioneiro na simulação de problemas de Geometria Diferencial no computador foi T. Banchoff, que utilizou computação gráfica como uma forma eficiente de visualizar objetos geométricos em dimensão maior que três, de modo a melhor compreender sua estrutura (ver [Ba]). Um dos exemplos estudados por Banchoff foi o hepercubo, que apareceu no número anterior de MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA. Outros exemplos foram a superfície de Veronese e os gráficos de algumas funções complexas.

É na área das superfícies mínimas e superfícies com curvatura média constante que o computador tem marcado sua presença em Geometria Diferencial.

A primeira evidência de que a superfície de Costa [Co] era mergulhada foi dada pelo computador. Além disso a própria simulação no computador forneceu pistas que levaram à prova de que a superfície não possuia auto–interseção. Mais ainda, uma nova família de superfície mínima foi descoberta a partir desse estudo [Ho,HoMe].

Na área de superfícies de curvatura média constante podemos ressaltar o uso do computador nas chamadas superfícies de rotação no espaço hiperbólico, onde a viasualização dessas superfícies possibilitou a obtenção de vários contra–exemplos para algumas questões que estavam em aberto na área e forneceu subsídios para a obtenção de alguns teoremas sobre essas superfícies [Go].

No caso do espaço euclidiano R^3 podemos mencionar o exemplo do toro com curvatura média constante (toro de Wente), cuja simulação no computador conduziu a uma demonstração mais simples de sua existência [Ab].

Inúmeros são os exemplos que poderíamos mencionar nessas e em outras áreas, tais como Álgebra (ver artigo neste número de MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA), Análise, Topologia, Teoria dos Números, etc. Não é nossa pretensão esgotar ou citar todos os exemplos nas mais diversas áreas. Os resultados que mencionanos constituem os exemplos pioneiros em Sistemas Dinâmicos e Geometria Diferencial.

Um dos nossos objetivos nos próximos números de MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA é conseguir artigos que contenham a divulgação de resultados análogos em outras áreas.

Já recebemos cartas de alguns leitores descrevendo trabalhos sobre Computação e Matemática que estão sendo desenvolvidos em várias universidades. Gostaríamos de divulgar nesta seção os vários projetos ou programas de pesquisa nessa área, que estejam em andamento ou já concluídos. Os leitores interessados podem escrever para a seção informando sobre seus programas ou projetos.

Referências

[Ab] ABRESCH, U., Constant Mean Curvature Tori in Terms of Elliptic Functions, J. Reine Angew. Math. 374 (1987), 169-192.

[Ba] T. F. BANCHOFF, Computer Animation and the Geometry of Surfaces in 3- and 4–space, Congresso Internacional de Matemáticos, Helsinque.

[Co] COSTA, C. J., Imersões Mínimas Completas em R^3 de Gênero um e Curvatura Total Finita, Tese de Doutorado, IMPA, 1982.

[Go] GOMES, J. M., Sobre Hipersuperfícies de Curvatura Média Constante no Espaço Hipérbolico, Tese de doutorado, IMPA, 1984.

[He] HENON, M., A two-dimensional mapping with a strange attractor, Comm. Math. Phys. 50 (1976), 69-77.

[Ho] HOFFMAN, D., The Computer-Aided Discovery of New Embedded Minimal Surfaces, Mathematical Intelligencer 3 (1986), 8-21.

[HoMe] HOFFMAN, D.; MEEKS III, W. A., A Complete Embedded Minimal Surface with Genus One, Three Ends and Finite Total Curvature, J. Diff. Geometry 21 (1985), 109-127.

[Ju] JULIA, G., Sur l'Interation des Fonctions Rationnelles, Journal de Math. Pures et Appl. 8 (1918), 47-245.

[Lo] LORENZ, E. N., Deterministic Non-Periodic Flows, J. Atmos. Sci. 20 (1963), 130-141.

[Ma] MANDELBROT, B. B., The Fractal Geometry of Nature, Freeman, 1982.

[PeRi] PEITGEN, H.-P.; RICHTER, P. H., The Beauty of Fractals, Spsringer–Verlag, 1986.

[PeSa] PEITGEN, H.-P., SAUPE, D. (Editores), The Science of Fractal Images, Springer–Verlag, 1988.

[Sp] SPARROW, C., The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. Sapringer–Verlag, 1982.