# Entrevista

Matemática Universitária N. 7, Junho de 1988, 11 - 20.

# Walter Feit comenta *o Teorema da Ordem Ímpar e a Classificação dos Grupos Simples*

O Professor Walter Feit visitou o Brasil em abril último para participar da reunião anual da União Matemática Inaternacional e da Workshop em Matemática realizado paralelamente no IMPA. Nessa oportunidade ele concedeu a José Felipe Voloch e Laura Martignon a entrevista que reproduzimos a seguir.

*Professor Feit, o senhor foi aluno e seguidor do Prof. Richard Brauer. Poderia nos dizer algo sobre ele?*

É verdade. Na teoria dos grupos ele foi a figura dominante da minha geração. Ele trabalhou em teoria dos grupos nas décadas de 30 e 40, quando quase ninguém mais o fazia. De fato, ele iniciou a teoria da representação modular (a teoria da representação no sentido clássico foi introdzida por Frobenius). Richard Brauer, pelo trabalho que executou e pela própria personalidade, exerceu uma influência notável sobre seus alunos; inspirava-os, encorajava-os e foi muito bem sucedido com eles. Entre seus primeiros alunos, deve-se mencionar Nesbitt, que aprofundou-se na teoria dos anéis, e naturalmente Steinberg, cuja tese, entre outras coisas, levou a vários resultados importantes na teoria dos grupos. Após a guerra, mais jovens entraram em campo e um dos primeiros foi Suzuki.

Conheci Brauer em 1951 em Michigan. Com ele fiz um curso de pós-graduação em teoria da representação e caracteres. A estada dele em Michigan coincidiu com a minha em apenas um ano mas esse ano me causou um grande impacto. Muito tempo depois, vim a colaborar com ele (1958, 1964). Na verdade, parte da minha tese tornou-se um trabalho conjunto nosso.

Um grupo finito $G$ é solúvel se exitem subgrupos $N_0, N_1, \ldots, N_{k+1}$ de $G$ com

$$G = N_0 \geq N_1 \geq \cdots \geq N_{k+1} = \{e\}$$

que satisfazem as seguintes condições:
i) $N_{i+1}$ é normal em $N_i$ para todo $i = 0, 1, \ldots, k$;
ii) $N_i/N_{i+1}$ é um grupo cíclico de ordem $p$.

O grupo $S_5$ das permutações de 5 elementos tem ordem $5! = 120$ e não é solúvel. Este fato está ligado à irresolubilidade da equação de 5º grau por radicais. Esta foi a grande descoberta de Galois, que deu início à Teoria dos Grupos.

O Teorema da Ordem Ímpar afirma que

*todo grupo de ordem ímpar é solúvel.*

Trata-se de um enunciado breve e simples cuja prova, obtida em 1962 por Walter Feit e John Thompson, ocupou 255 páginas do Pacific Journal of Mathematics. As técnicas introduzidas ao longo da prova foram a base de muitos dos desenvolvimentos posteriores na teoria dos grupos finitos. O Teorema da Ordem mpar é um elemento crucial em todasÍ as demonstrações dos teoremas da Classificação dos Grupos Simples (veja a janela seguinte).

*Por que o senhor se interessou pela Conjectura da Ordem Ímpar na teoria dos grupos finitos?*

Antes de tudo porque fiquei fascinado por ela.

*Qual é a história do Teorema da Ordem Ímpar? Quem foi o primeiro a elaborar a conjectura?*

Burnside certamente o mencionou em um dos seus artigos, mas não deve ter sido o primeiro. Brauer achava que ele já havia sido enunciado antes, talvez por Jordan.

*Então a conjectura já era conhecida no século XIX?*

Jordan escreveu o primeiro livro sobre teoria dos grupos antes do fim do século passado. Lá já se pode encontrar uma lista de grupos muito especiais. Os trabalhos de Burnside foram escritos por volta de 1900. Ele chegou a resultados muito interessantes "experimentando" com esses grupos. Mostrou, por exemplo, que cada grupo simples de ordem menor do que 40.000 tem ordem par.

*Na época em que o senhor começou a trabalhar sobre a conjectura, tinha alguma intuição que o levava a crer que era verdadeira?*

Achei muito intrigante o fato do enunciado ser tão simples. Até hoje as pessoas perguntam se tínhamos alguma intuição natural da coisa, mas nunca encontrei intuições que fossem fáceis de explicar para alguém fora da área.

*No entanto o senhor não duvidava que a conjectura fosse verdadeira?*

Em momento algum. É um enunciado tão natural! E depois, logo se torna óbvio que os elementos de ordem par num grupo têm propriedades especiais.

*Como veio a ocorrer sua colaboração com Thompson?*

Brauer e Suzuki tinham desenvolvido a teoria dos caracteres excepcionais. Utilizando–a, Susuki demonstrara que um grupo de ordem ímpar no qual o centralizador de todo elemento diferente da identidade é abeliano, é necessariamente solúvel. Tentei estender esse resultado. Para tanto, introduzi um conceito que hoje é chamado "coerência", que veio a ser relevante na caracterização dos grupos que hoje são chamados de Zassenhaus. Mas para aplicar meu método, precisei saber se um certo tipo de grupo era solúvel. Por mera coincidência, Thompson escreveu sua tese provando exatamente o que eu precisava. Seus métodos eram totalmente novos e diferentes dos antigos mas os resultados combinavam com os meus.

*Quando o senhor o conheceu?*

Conhecemo-nos numa conferência em Nova York em 1959. Mais tarde ele visitou Cornell quando eu trabalhava lá e eu o visitei em Princeton.

*Quanto tempo os senhores levaram para provar a Conjectura da Ordem Ímpar?*

Bem, acho que se soubéssemos quanto tempo levaríamos, não teríamos começado. Houve um trabalho conjunto de Marshall Hall, Thompson e eu, no qual generalizamos os resultados de Suzuki para grupos em que o centralizador de cada elemento diferente da identidade é nilpotente. Isso já era bem animador.

*Quando os senhores começaram, já tinham em mente um programa?*

Ah, sem dúvida, mas as etapas foram muito mais difíceis do que esperávamos. Eu procurei estender os resultados do nosso trabalho com Marshall Hall a grupos onde os grupos de Sylow formam um conjunto de interseção trivial. Nenhum de nós conseguiu, mas fizemos alguns progressos. Primeiro consideramos apenas os grupos em que cada grupo de Silow fosse abeliano. Tratava-se de um teste para os nossos métodos.

*Os senhores precisaram de 255 páginas! Se bem entendemos, Bender, Glauberman e Sibley trabalharam na simplificação do teorema. Sibley procurou simplificar a parte relativa às representações e caracteres, enquanto Bender e Glauberman se ativeram à parte estritamente teórica. Eles conseguiram o que queriam?*

Bem, encontrei-me com Sibley e Bender há algumas semanas e eles me disseram que sua versão está quase completa. Peterfalvi também fez uma simplificação importante.

*Se a simplificação levou tanto tempo e acarretou tanto trabalho, até que ponto se pode chamá-la de simplificação?*

Não é só uma questão de simplificação, mas antes de estabelecer o resultado num contexto mais compreensível.

Um grupo é simples se não contém subgrupos normais (não-triviais). Os grupos cíclicos de ordem $p$, onde $p$ é um número primo, são simples. O grupo alternado $A_5$, das permutações pares de 5 símbolos, é simples. De fato, $A_n$, com $n \geq 5$, é simples. Os grupos finitos simples são as "partículas elementares" da teoría dos grupos finitos e sua classificação, terminada em 1980, ocupa mais de 10.000 páginas, de trabalhos escritos, ao longo de mais de um século. O Teorema da Classicifação estabelece que todo grupo finito simples pertence a uma das categorias seguintes:

1. Gupos cíclicos de ordem prima.
2. Grupos alternados.
3. Grupos de tipo de Lie.
4. Grupos esporádicos.

Como acontece com as partículas elementares na Fsica, a existéncia de certos grupos simples foi "predita" por alguns matemáticos, embora sua construção tenha sido realizada só mais tarde e com grandes dificuldades. Este foi o caso do MONSTRO, predito por Bernd Fischer e Bob Griess em 1973. A ordem do MONSTRO é

$$\begin{aligned} & 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot \\ & 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71 = \\ = \; & 808,017,424,794,512,875,886,459,904,961, \\ & 710,757,005,754,368,000,000,000 \end{aligned}$$

Este MONSTRO, longe de ser um objeto patológico construido na torre de marfim dos algebristas, tem seu lugar nas leis da natureza, como foi descoberto recentemente pelos físicos (veja a janela seguinte).

*Com freqüência, em cursos de teoria dos grupos, há um esforço para não se utilizar o "Teorema da Ordem Ímpar" e as coisas são demonstradas de outra forma, por outros métodos.*

Trata-se do velho princípio de que se devem apenas utilizar os resultados cujas provas se podem compreeder. Brauer pensava assim. Hoje, muitas provas são tão longas que aquele princípio torna-se difícil de ser aplicado. Por isso, ninguém, de fato, percorreu todos aqueles trabalhos que conduziram à classificação de grupos finitos simples. O resultado, no entanto, de um modo geral é aceito como verdadeiro.

*O senhor acha que Brauer teria acreditado na possibilidade da classificação?*

Uma vez, quando eu ainda era estudante, Brauer me disse: "Em vida, poderei chegar a ver o Teorema da Ordem Ímpar mas não a Classificação". Ele morreu um ano antes que ela fosse completada.

*O senhor acredita que a Classificação esteja completa?*

Acho que sim. Há um movimento chamado "revisionismo" que é uma tentativa de percorrer todas as provas da Classificação, e, quando possível, re-escrevê-las de forma mais simples. Em breve isso terá que ser feito, em boa parte porque os especialistas nesse assunto estão envelhecendo e esse tipo de trabalho não atrai os jovens doutorandos.

*Há alguns anos, Michael Atiyah declarou (numa entrevista publicada no "Mathematical Intelligencer") que ele considera que o esforço dispendido na Classificação de grupos finitos simples é simplesmente inútil. Como o senhor reage a esta declaração?*

Atiyah é um grande matemático e pode se dar ao luxo de uma declaração intempestiva. Algumas vezes ele também caiu na tentação de trabalhar em teoremas de classificação. Veja por exemplo a própria tese dele e também suas conferências de Pisa. A esta altura ele vê o "MONSTRO" aparecendo naturalmente na teoria quântica de campos e já está interessado no trabalho de Conway e no reticulado de Leech. Quanto à palavra "inútil", as pessoas devem tomar um certo cuidado com ela. Por volta do ano 200 A.C., Apolônio desenvolveu a teoria das cônicas que Kepler viria a utilizar dezoito séculos mais tarde! O melhor exemplo da utilização do que pareceria "inútil" de início talvez seja a geometria Riemanniana (na relatividade). Outro caso interessante é a teoria da representação desenvolvida por Frobenius para atacar certos problemas na teoria dos números. Hoje tornou-se um instrumento padrão para os físicos. A maioria das partes teóricas da ciência da computação deriva de Matemática "inútil". Um matemático pode se considerar com sorte ao encontrar algo interessante quando não sabe bem o que está procurando. Acho, entretanto, que ele atrai a sua própria sorte quando estuda um assunto que tenha valor intrínseco. Outro bom exemplo é a obra de Coxeter, ignorada pela maior parte da comunidade matemática por muitos anos, mas agora considerada de importância capital. No meu caso, levei muito tempo para aprender que às vezes teorias gerais têm consequências muito menos importantes do que os casos especiais e as exceções. Por exemplo, o fato muito especial de que $PSL_2(\mathbb{C})$ é isomorfo ao grupo de Lorentz é de enorme importância na Física.

*Gostaríamos de passar para outro grande resultado, o teorema de Feit–Higman.*

Steinberg tinha um artigo onde mostrava a existência do que hoje se chama caráter de Steinberg para certos grupos que satisfaçam 14 condições. Procurando compreender isto, observei que se poderia descartar a maior parte delas e formulei os axiomas dos $BN$-pares. Estes grupos incluem todos os grupos de Ree. Estes têm um grupo de Weyl. Entre os grupos gerados por reflexões, os grupos de Weyl dos grupos de Lie são exatamente os que podem ser escritos racionalmente. Por outro lado, $D_{16}$ ocorre como um grupo de Weyl de um grupo de Ree. Fiquei curioso para saber quais grupos gerados por reflexões ocorrem como grupos de Weyl. Graham Higman visitou-me em Cornell em 1962 e nós resolvemos o problema. Tits assinalou que ele introduzira os $BN$-pares e polígonos generalizados. Compreendemos que os nossos argumentos funcionavam neste contexto mais geral. Assim, pudemos também reformular nossos resultados como um teorema geométrico.

Num artigo de 1983 com o título "Unfashionable pursuits"[1], o físico Freeman Dyson especulava sobre o futuro da Física e de modo vivo evocava o atrativo das aplicações de estruturas singulares da Matemática: "Devo confessar que tenho um fio de esperança, uma esperança sem apoio de qualquer fato ou prova, que em algum momento do século XXI os físicos tropeçarão com o MONSTRO embutido de modo insuspeito na estrutura do universo. Naturalmente é só uma especulação desvairada, talvez errada. O único argumento que consigo apresentar á de natureza teológica. Temos provas definitivas que o Criador do universo ama a simetria; e se é assim, que simetria mais adorável podería ele encontrar do que a do MONSTRO?"

Anos depois, confirmando a força da intuição de Freeman Dyson, o físico matemático Werner Nahm escrevia na introdução ao trabalho "Quantum field theory in one and two dimensions"[2]: "Todas as forças físicas conhecidas foram descritas pela teoria quantica de campos. Esta é provavelmente a mais importante conquista da Física Teórica nos últimos 50 anos. No entanto, por várias décadas este sucesso levou a um distanciamento entre a Física e a Matemática, pois ainda não aprendemos a analisar aquelas complexas teorias com métodos a um tempo eficiente e vigorosos. Nos últimos anos, entretanto, os físicos descrobriram o uso de sistemas dessa espécie para descrição de fenómenos da Física Estatística, assim como no esforço de elucidar as relações da gravidade com as outras forças da natureza. Uma descoberta surpreendente nesta direção foi perceber que uma das teorias quânticas de campos mais simples possiveis tem o MONSTRO como grupo de automorfismos."

***O senhor está agora trabalhando no Problema de Noether e Thompson também o faz. Por que será que especialistas famosos da Teoria dos Grupo estão dedicando sua atenção a um tópico que deriva da teoria dos números?***

[1] ver Mathematical Inteligencer, vol. 5, 1983.

[2] ver Duke Mathematical Journal, vol. 54 N$^{\underline{o}}$ 2, 1987, pp. 579-613.

O Problema de Noether investiga a seguinte questão: *Quais grupos finitos são grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$?*

No final da década de 60, Michael Fried relacionou a questão da reducibilidade de um polinômio da forma $f(x) - g(y)$ a um problema em teoria dos grupos. O trabalho de Fried se relaciona muito com o problema de Noether. Fried também apresentou vários outros problemas que ele reduziu a questões na teoria dos grupos. Este trabalho me interessou e eu fiz várias contribuições a esse assunto.

Belyi, Fried, Matzat e Thompson iniciaram um novo ataque ao problema de Noether. O trabalho de Fried foi o primeiro, mas levou tempo para as pessoas o compreenderem. Sabia-se que pouquíssimos grupos simples eram grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$, nenhum dos grupos esporádicos era conhecido como tal antes de 1980. Pela utilização destes novos métodos sabe-se agora, por exemplo, que todos os grupos esporádicos que não o $M_{23}$ são grupos de Galois sobre $\mathbb{Q}$. Esta é a obra de muitas pessoas a partir de Thompson, que lidou com o MONSTRO.

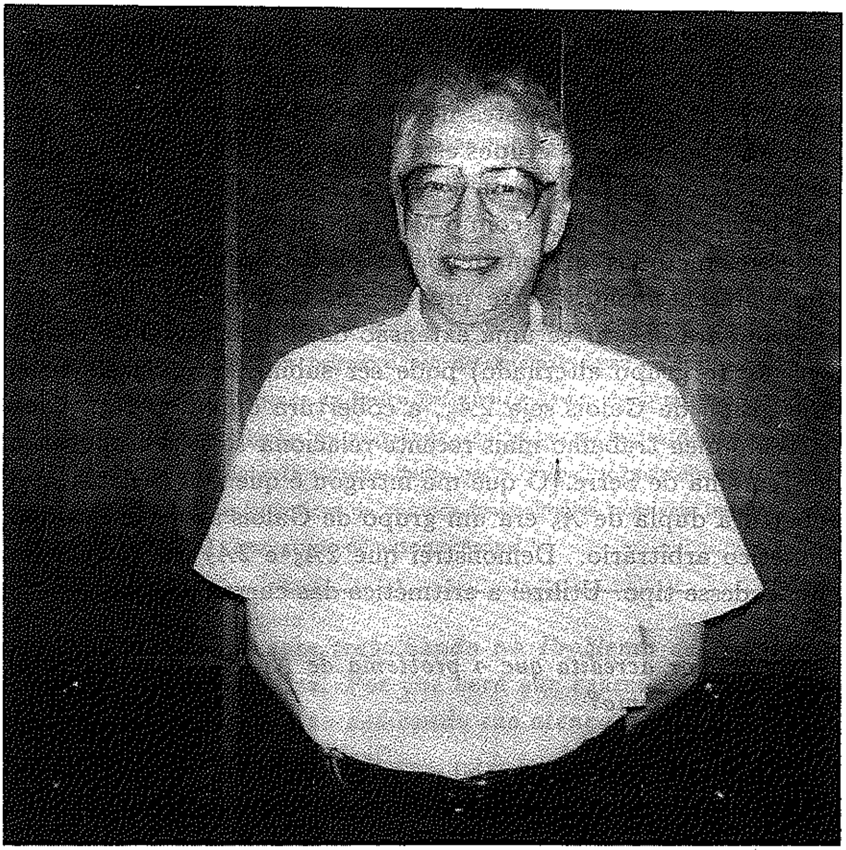
Estes métodos funcionam apenas para grupos com centro travial. Recentemente, Serre provou um teorema que inclui um critério para decidir se uma extensão de $\mathbb{Q}$ cujo grupo de Galois seja $A_n$ (o grupo alternado) pode ser submerso numa extensão cujo grupo de Galois seja $2A_n$, a cobertura dupla de $A_n$. Uma parte do meu trabalho mais recente relaciona-se com a aplicação do Teorema de Serre. O que me intrigou é que não se sabia se a cobertura dupla de $A_5$ era um grupo de Galois sobre um campo numérico arbitrário. Demonstrei que $2A_5$ e $2A_7$ são grupos de Galois desse tipo. Utilizei a aritmética das curvas elípticas.

*O senhor acredita que o problema de Noether será resolvido em futuro próximo?*

Não tenho motivo especial para crer nisso.

*Para finalizarmos, qual é o seu método de trabalho? Qual tem sido sua "estratégia de pesquisa" por todos estes anos?*

De certo modo só consigo trabalhar em um problema se ele realmente me intriga. Creio que minha estratégia principal tenha sido sempre a de ser muito teimoso e ignorar modas e tendências. Na década de 50, por exemplo, a moda era a "Bourbakização" mas Brauer e Suzuki trabalharam muito em teoria de grupos finitos, o que de algum modo ia contra a "Bourbakização". Hoje, todo mundo concorda que o trabalho deles é importante. Nesse sentido, Coxeter é um dos meus heróis. Como eu disse, o que ele fez (grupos gerados por reflexões e tópicos geométricos correlatos) ficou ignorado por muito tempo. Se ele não tivesse sido tão teimoso e insistente, provavelmente teria mudado para uma área muito menos importante.



Walter Feit durante sua visita ao IMPA abril de 1988