Problemas e Soluções

Novos Problemas Propostos

Problema 14. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n, de funções reais contínuas, invariante por translações, i.e., se $f \in V$ e $s \in \mathbb{R}$, então f_s, definida por $f_s(t) = f(t+s)$, também pertence a V. Mostre que V é o espaço solução de uma equação diferencial ordinária com coeficiente constantes de ordem n. (A recíproca é óbviamente verdadeira). (Proposto por Maria Lucia Menezes, PUC/RJ.)

Problema 15. No cubo C_n que consiste de todos os $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, com $0 \leq x_1, \ldots, x_n \leq 1$, a face definida por $x_n = 0$ é identificada com a face $x_1 = 1$ pela fórmula $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) \sim (1, x_1, \ldots, x_{n-1})$. Dê uma construção mais evidente deste espaço quociente. (Proposto por Derek Hacon, PUC/RJ.)

Problema 16. Sejam K o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos, X_i, $i \in I$, uma família de espaços vetoriais sobre K, e B_i, $i \in I$, um subconjunto linearmente dependente de X_i. Se I é um conjunto infinito, é verdade que $\prod_{i\in I} B_i$ é um subconjunto linearmente dependente do espaço vetorial produto $\prod_{i \in I} X_i$? (Proposto por Ernesto Bruno Cossi, UFRS.)

Problema 17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^∞. Prove que f é um polinômio se e só se o desenvolvimento de Taylor de f em qualquer ponto $a \in \mathbb{R}$ é um polinômio. (Proposto por Wojciek Kucharz, State University, Albuquerque, New Mexico.)

Problema 18. Considere a equação

$$x^2 + 1 = 2 \cdot 5^a.$$

a) Ache, por métodos elementares, todos os pares (x, a), tais que $a \in I\!N$ e x *é potência de um número primo,* que satisfazem a equação.

b) Ache todos os pares (x, a), tais que $a \in I\!N$ e $x \in \mathbb{Z}$, que satisfazem a equação. (Proposto por Christoph Hering, Math. Institut, Univ. Tübingen.)

Soluções de Problemas Anteriores

Problema 10. Sejam E, F espaços vetorias reais com $\dim E \geq 2$. Prove que uma aplicação injetiva $T : E \to F$ é linear se, e somente se, $T \cdot 0 = 0$ e, para toda reta $r \subset E$, sua imagem $T \cdot r$ é uma reta em F. Dê um exemplo de uma aplicação não injetiva $T : I\!R \to I\!R^2$ que deixa a origem fixa. Transforma retas em retas, mas não é linear.

Solução (Derek Hacon - PUC/RJ). Se A, e B são vetores em E, então $T(A)$, $T(B)$, $T(\frac{A+B}{2})$ são colineares e portanto 0, $T(A)$, $T(B)$, $T(A+B)$ são coplanares. Se A, e B são linearmente independentes então do paralelogramo 0, $T(A)$, $T(B)$, $T(A+B)$, temos $T(A+B) = T(A) + T(B)$.

Seja agora $A \neq 0$. Definimos $f : I\!R \to I\!R$ por $T(xA) = f(x)T(A)$. Como $\dim E \geq 2$ podemos escolher B tal que A e B são linearmente independentes. Considerando $T(A)$, $T(xA)$, $T(B)$, $T(xB)$, temos $T(xB) = f(x)T(B)$; e considerando $T(B)$, $T(xB)$, $T(yA), T(x\,y\,A)$, temos $T(x\,y\,A) = f(x)T(yA)$. Então $f(xy) = f(x)f(y)$. Temos também $T(B) + T(xA + yA) = T(B + xA + yA) = T(B + xA) + T(yA) = T(B) + T(xA) + T(yA)$. Então $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

Podemos concluir que f preserva a ordem em $I\!R$, pois $x \geq y \Rightarrow x = y + z^2 \Rightarrow f(x) = f(y) + f(z)^2$. Se r é racional então $f(r) = r$, pois $f(1) = 1$. Se x é real e $r \leq x \leq s$, com r, e s racionais, então $r \leq f(x) \leq s$. Portanto $f(x) = x$ para todo x real, ou seja, $T(xA) = xT(A)$, e T é linear.

Um exemplo de uma T não injetiva é $T(x,y) = (y - x^3, 0)$.

Outra solução foi enviada por Luiz Fernando C. Camargo e Trajano P. da Nobrega Melo, alunos de Doutorado do IMECC–UNICAMP, que formulam a seguinte pergunta:

Se E e F são espaços vetoriais reais, com dim $E =$ dim $F \geq 2$, é verdade que toda aplicação sobrejetiva $T : E \to F$ que fixa a origem e transforma retas em retas é linear? Existe uma aplicação sobrejetiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que leva retas em retas?

Problema 11. Considere a esfera S^3 como o sub–conjunto de $\mathbb{C}^2$ dado por

$$S^3 = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Mostre que para toda função contínua

$$f : S^3 \to \mathbb{C}$$

a equação

$$z \cdot f(z,w) + w = 0$$

tem solução em S^3.

Primeira solução (Derek Hacon – PUC/RJ). Seja $|w| \leq 1$ e $g(w) = zf(z,w) + w$ onde $z = \sqrt{1 - |w|^2}$. Então g é uma aplicação contínua do disco $|w| \leq 1$ em $\mathbb{C}$ e $g(w) = w$ se $|w| = 1$. Portanto existe w_0 com $|w_0| < 1$ e $g(w_0) = 0$.

Segunda solução (Antonio Conde – USP/SC). Como os pontos de S^3 do tipo $(0,w)$, $|w| = 1$ não podem ser soluções, podemos retirar este círculo de S^3. Seja $\phi(z,w) = -\frac{w}{z}$ a função definida em S^3 menos os pontos com $z = 0$. Tal função admite uma inversa à direita s (secção) em $\mathbb{C}$, dada por

$$s(u) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+u\bar{u}}}, \frac{-u}{\sqrt{1+u\bar{u}}}\right), \qquad p \cdot s(u) = u.$$

Como f é contínua e S^3 compacto, sua imagem em $\mathbb{C}$ está contida num disco (fechado) D. A imagem inversa de D por p, S^3_ε é exatamente o conjunto dos pontos (z,w) de S^3 com $|z| \geq \varepsilon$ para um certo ε. Temos em S^3_ε definidas f e p com valores em D. Agora a função composta

$$f \cdot s : D \to D$$

é contínua, portanto tem ponto fixo u_0:

$$f \cdot s(u_0) = u_0$$
$$p \cdot s(u_0) = u_0$$

uma solução é $(z,w) = s(u_0)$.

Problema 12. Seja K um espaço compacto e $C(K)$ o espaço de Banach das funções contínuas de K em $\mathbb{C}$, munido da norma do supremo. Dado um homeomorfismo $\varphi : K \to K$, indicamos com T_φ o operador induzido por φ, i.e., $T_\varphi f = f \circ \varphi$ para toda função $f \in C(K)$. É claro que 1 é autovalor de T_φ para todo homeomorfismo φ. Prove que se o espectro de T_φ é $\{1\}$ então φ é o homeomorfismo trivial, i.e., $\varphi(t) = t$ para todo $t \in K$.

Solução (Jorge Hounie - UFPE). Consideremos o operador $S = T^* : \mathcal{M}(K) \to \mathcal{M}(K)$ definido por $S\mu(A) = \mu(\varphi^{-1}(A))$. Sabemos que $\sigma(S) = \sigma(T)$. Queremos ver que se $\varphi \neq \mathrm{Id}$ então $\sigma(S) \backslash \{1\} \neq \phi$.

Se $x \in K$ e $\varphi(x) \neq x$, consideramos as duas possibilidade a seguir:

1) *A órbita de x é finita.* Neste caso existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^p(x) = x$. Seja $\alpha = e^{2\pi i/p}$; se δ_x é a medida atómica concentrada em x, temos que

$$\alpha = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha^k S^k \delta_x$$

verifica $Sr = \alpha^{-1} r$ e portanto α^{-1} é autovalor de S.

2) *A órbita de x é infinita.* Neste caso, para todos os inteiros p, q, com $p \neq q$, temos $\varphi^p(x) \neq \varphi^q(x)$.

Consideremos $\lambda \in \mathbb{C}$ com $|\lambda| = 1$, e escrevamos $x_p = \varphi^p(x)$ para todo $p \in \mathbb{Z}$. Suponhamos que exista $\mu \in \mathcal{M}(K)$ tal que $S_\mu - \lambda_\mu = \delta_x$. Para k temos

$$S_\mu(x_k) - \lambda_\mu(x_k) = \delta_x(x_k)$$

e portanto

$$\mu(\varphi^{-1}(x_k)) - \lambda_\mu(x_k) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = 0 \\ 0 & \text{se} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

ou seja, $\mu(x_{k-1}) = \lambda_\mu(x_k) + \delta_{0k}$. Assim, $\mu(x_{-1}) = \lambda_\mu(x_0) + 1$, donde que $\mu(x_{-1})$ e $\mu(x_0)$ não podem ser ambos nulos. Suponhamos que $\mu(x_0) \neq 0$. Usando $\mu(x_k) = \frac{1}{\lambda}\mu(x_{k-1})$ para $k = 1, 2, \ldots$, obtemos $\mu(x_k) = \lambda^{-k}\mu(x_0)$, que implica

$$||\mu|| \geq \sum_{j=0}^{N} |\lambda^{-k}||\mu(x_0)| = (N+1)|\mu(x_0)|,$$

pois $|\lambda| = 1$. Isto é uma contradição, pois $||\mu|| < \infty$.

Problema 13. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ elementos de $\mathbb{C} - \{0\}$ e $p_1, \ldots, p_k$ polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$. Seja $a : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ a função dada por

$$a(n) = \sum_{i=1}^{k} p_i(n)\alpha_i^n$$

e considere as séries

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a(n) z^n, \qquad g(z) = -\sum_{n \geq 1} a(-n) z^n.$$

Prove: 1) f e g convergem numa vizinhança da origem;

2) f e g se estendem como funções meromorfas em todo o plano;

3) $f(z) = g(\frac{1}{z})$, sempre que os dois lados desta igualdade estiverem definidos.

Solução (Derek Hacon - PUC/RJ). Por linearidade do problema é suficiente considerar o caso $k = 1$, $\alpha_1 = 1$ e $p_1(n) = n^j$, onde

$j \geq 0$. Nste caso $f(z) = \sum_{n\geq 0} n^j z^n$ e $g(\frac{1}{z}) = (-1)^{j+1} \sum_{n\geq 1} n^j z^{-n}$.
Se $j = 0$ então

$$f(z) = \sum_{n\geq 1} z^n = \frac{1}{1-z} = -z\frac{1}{1-z^{-1}} = -\sum_{n\geq 1} z^{-n} = g(\frac{1}{z}).$$

Se $j > 0$ então

$$\sum_{n\geq 0} n^j z^n = z\frac{d}{d-z}\left(\sum_{n\geq 0} n^{j-1} z^n\right)$$

e

$$(-1)^{j+1} \sum_{n\geq 1} n^j z^{-n} = z\frac{d}{d-z}((-1)^j \sum_{n\geq 1} n^{j-1} z^{-n}).$$

Agora (1), (2), (3) seguem por indução sobre $j \geq 0$.