

3-Toros Mínimos na esfera de dimensão 4

Gabriel d'Annunzio¹, Maria Luiza Leite e Ricardo Medeiros¹
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Pernambuco
Cidade Universitária
50.739 Recife-PE

1. Introdução

O objetivo desta nota é descrever um trabalho de Iniciação Científica em Geometria Diferencial, onde o computador foi utilizado no cálculo e no traçado de soluções numéricas aproximadas para um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Um problema clássico de Geometria Diferencial é o de determinar as superfícies de revolução mínimas em \mathbb{R}^3 , que descreveremos a seguir.

Uma superfície de revolução em \mathbb{R}^3 é obtida pela revolução completa de uma curva Γ , contida no semi-plano $x_1x_3, x_1 > 0$, em torno do eixo- x_3 .

Uma propriedade que caracteriza as superfícies de revolução é a de serem preservadas pela ação do grupo ortogonal $SO(2)$, formado por rotações. Lembramos que a rotação R de um ângulo α , associada à matriz $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$, transforma o ponto (x_1, x_2, x_3) em $((\cos \alpha)x_1 - (\sin \alpha)x_2, (\sin \alpha)x_1 + (\cos \alpha)x_2, x_3)$. A

¹Aluno de Engenharia Elétrica da UFPE e bolsista da Iniciação Científica em Matemática no ano 1987.

figura 1 ilustra essa propriedade no caso de $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

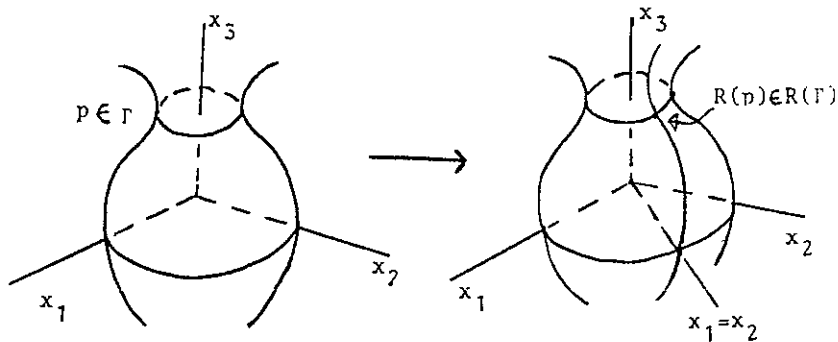


Figura 1

Define-se por *superfície mínima em \mathbb{R}^3* aquela, cuja curvatura média se anula. A curvatura média é definida como a média das curvaturas principais. Para uma descrição da curvatura média, o leitor pode consultar [dC1] e [G] como referências de divulgação, e [dC2] e [N] para maiores detalhes.

A geometria de uma superfície de revolução se reduz à geometria da curva plana Γ , daí a simplificação no cálculo da curvatura média. Ao longo da circunferência descrita por um ponto $p \in \Gamma$, os valores das curvaturas principais permanecem constantes. Uma das curvaturas principais coincide com a curvatura plana da curva geratriz Γ ; a outra curvatura principal é o produto $g \cdot \cos \beta$, onde g é a distância do ponto p a Oz e β denota o ângulo orientado que a reta tangente faz com o eixo de revolução,

conforme a figura 2.

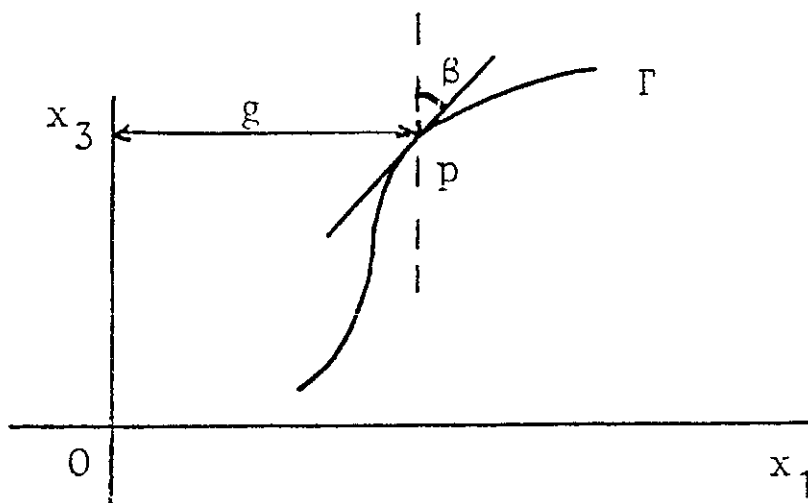


Figura 2

Pelos cálculos feitos em [N] a partir da página 234, segue-se que Γ descreve uma superfície de revolução mínima em \mathbb{R}^3 se e somente se a parametrização por comprimento de arco $(g(s), h(s))$ da curva Γ satisfaz o sistema de equações diferenciais.

$$(1) \quad \begin{cases} g'^2 + h'^2 = 1 \\ h''' + g'h'' = 0 \end{cases}$$

Salientamos que o sistema (1) é completamente integrável por métodos elementares. A saber, dadas as condições iniciais de posição e velocidade para Γ obtém-se dois tipos de soluções:

1. semi-reta horizontal (com as duas orientações possíveis), cuja revolução gera um plano horizontal;
2. catenária (com as duas orientações possíveis), cuja revolução gera um catenóide.

A figura 3 ilustra o plano de fase do sistema (1).¹

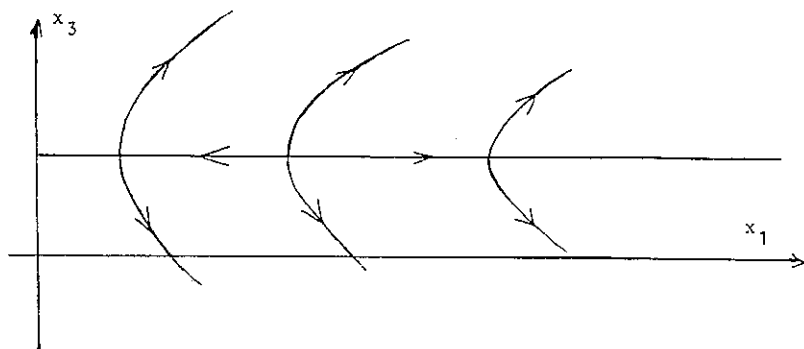


Figura 3

2. 3-Toros Mínimos em Esferas

A classificação das superfícies de revolução mínimas em \mathbb{R}^3 é um caso particular de um problema matemático mais geral, de grande interesse em Geometria Diferencial. O problema consiste em estudar as hipersuperfícies mínimas em espaços geométricos não necessariamente euclidianos, de curvatura constante e dimensão $n \geq 3$, que sejam invariantes sob a ação de "rotações". Esse problema teve um grande impulso a partir de 1982 quando W.Y.Hsiang respondeu uma pergunta muito importante de Geometria Diferencial, apresentando um tal hipersuperfície como contra-exemplo. O trabalho de Hsiang ([H]) foi publicado num dos periódicos internacionais de maior prestígio.

Num trabalho em colaboração com Fabiano Brito ([B-L]), estudamos um outro caso particular cuja matemática é mais complicada e que apresentamos a seguir, fazendo analogia com o caso das superfícies de revolução mínimas em \mathbb{R}^3 .

No lugar do espaço euclidiano \mathbb{R}^3 de dimensão 3 e curvatura 0, consideramos a esfera unitária S^4 formada pelos pontos

$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de \mathbb{R}^5 que satisfazem $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1$. A esfera S^4 tem dimensão 4 e é o modelo de espaço geométrico com curvatura 1.

No lugar do grupo de rotações $SO(2)$ consideramos o grupo produto $SO(2) \times SO(2)$ de pares de rotações. Um par de rotações, associado à matriz ortogonal

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \beta & \sin \beta \\ 0 & 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}$$

transforma o ponto $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S^4$ em $((\cos \alpha)x_1 - (\sin \alpha)x_2, (\sin \alpha)x_1 + (\cos \alpha)x_2, (\cos \beta)x_3 - (\sin \beta)x_4, (\sin \beta)x_3 + (\cos \beta)x_4, x_5)$.

Da mesma forma que a revolução completa de um ponto (a, b, c) de \mathbb{R}^3 descreve uma circunferência de raio $\sqrt{a^2 + b^2}$ no plano (x_1, x_2, c) , temos que sob a ação de $SO(2) \times SO(2)$ um ponto $(a, b, c, d, e) \in S^4$ descreve um produto de circunferências, uma de raio $\sqrt{a^2 + b^2}$ no plano (x_1, x_2, c, d, e) e a outra de raio $\sqrt{c^2 + d^2}$ no plano (a, b, x_3, x_4, e) . O produto dessas circunferências é uma superfície bidimensional contida em S^4 chamada *2-toro*, pois pode ser transformada na superfície de \mathbb{R}^3 que se assemelha a uma câmara de ar.

No lugar de uma curva geratriz Γ que vive no semi-plano de \mathbb{R}^3 dado por $\{(x_1, 0, x_3) \mid x_1 > 0\}$, consideramos uma curva geratriz Γ que vive no fuso esférico bidimensional de S^4 definido por $\{(x_1, 0, x_3, 0, x_5) \mid x_1 > 0, x_3 > 0\}$. Lembramos que esse fuso é parametrizado por duas coordenadas geográficas $\phi \in (0, \pi)$ e $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, definidas nos cursos de Cálculo. Uma *hipersuperfície invariante por $SO(2) \times SO(2)$ em S^4* é obtida como o conjunto dos 2-toros descritos pelos pontos de Γ .

A idéia de curvatura média se generaliza para hipersuperfícies de S^4 , dizendo-se que uma hipersuperfície mínima é aquela cuja curvatura média se anula.

Pelos cálculos feitos em [B-C] e [H], e de forma mais elementar em [B-L], segue-se que Γ gera uma hipersuperfície mínima em S^4 invariante pela ação de $SO(2) \times SO(2)$ se e somente se a

parametrização por comprimento de arco $(\phi(s), \theta(s))$ de Γ satisfaz o sistema de equações diferenciais

$$(2) \quad \begin{cases} \phi'^2 &= 1 - (\sin^2 \phi)\theta'^2 \\ \phi'' &= 3(1 - \phi'^2) \cot \phi - 2\phi' \frac{\sqrt{1 - \phi'^2}}{\sin \phi} \cot 2\theta \end{cases}$$

O sistema (2) não é integrável por métodos elementares. É nesse ponto que o computador é de grande valia no estudo das soluções, com a utilização de métodos numéricos.

Hsiang resolveu o problema de Bernstein esférico ao descobrir soluções simples de (2) que intersectam ortogonalmente a fronteira do fuso esférico.

No trabalho com Fabiano Brito, estudamos as soluções fechadas de (2). As hipersuperfícies descritas pelas curvas fechadas Γ são chamadas *3-toros*, por serem identificadas com o triplo produto de circunferências descritas por cada ponto de Γ e a própria curva Γ que por ser fechada é pensada como a terceira circunferência.

3. O Trabalho no Computador

Pelos resultados de Hsiang, conhecíamos a simetria do sistema (2) relativamente às soluções triviais Γ_1 e Γ_2 , definidas por $\phi(s) = \frac{\pi}{2}$ e $\theta(s) = \frac{\pi}{4}$, respectivamente.

Foi natural procurar soluções que, partindo ortogonalmente de Γ_2 , chegassem ortogonalmente a Γ_1 e portanto fechassem.

(ver figura 4).

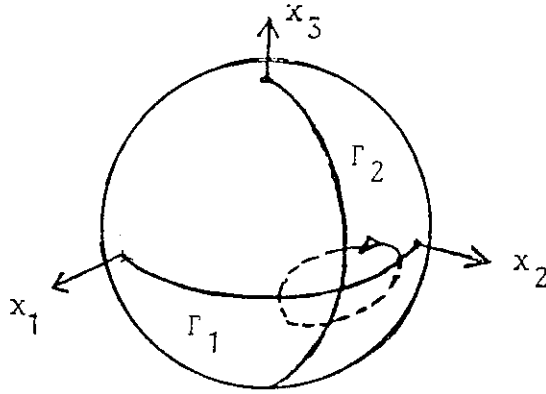


Figura 4

O trabalho de Iniciação Científica foi descobrir as condições iniciais cujas soluções de (2) fossem periódicas.

No início do projeto, transformamos o sistema (2) no sistema de primeira ordem

$$(3) \quad \begin{cases} \phi = z \\ \theta' = \frac{\pm\sqrt{1-z^2}}{\sin \phi} \\ z' = 3(1-z^2) \cot \phi - 2z\sqrt{1-z^2} \frac{\cot 2\theta}{\sin \theta} \end{cases}$$

com as condições iniciais $\phi(0) = \phi_0 < \frac{\pi}{2}$, $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$ e $z(0) = 0$.

Usamos a subrotina DO2BBF da Biblioteca NAG [Na] no computador DEC-10 da Universidade Federal de Pernambuco. Essa subrotina se baseia no método de Runge-Kutta-Merson para obter soluções numéricas aproximadas de um sistema de primeira ordem, com condições iniciais dadas.

Os primeiros resultados foram animadores, mas apresentavam um problema técnico para desenhar a curva fechada Γ . Escolhendo a segunda equação de (3) com o sinal +, como na figura 4, precisávamos mudar para o sinal - quando Γ se aproximava de Γ_1 , ou seja $\theta' \rightarrow 0$, e então continuar o desenho.

Resolvemos essa dificuldade com a transformação $z = \sin y$, $y \in (0, \pi)$, obtendo o sistema (4) equivalente ao sistema (2) e com

θ' mudando de sinal:

$$(4) \quad \begin{cases} \phi' = \sin y \\ \theta' = \frac{\cos y}{\sin \phi} \\ y' = 3 \cos y \cot \phi - 2 \sin y \frac{\cot 2\theta}{\sin \theta} \end{cases}$$

Reproduzimos a seguir três das soluções encontradas numericamente.

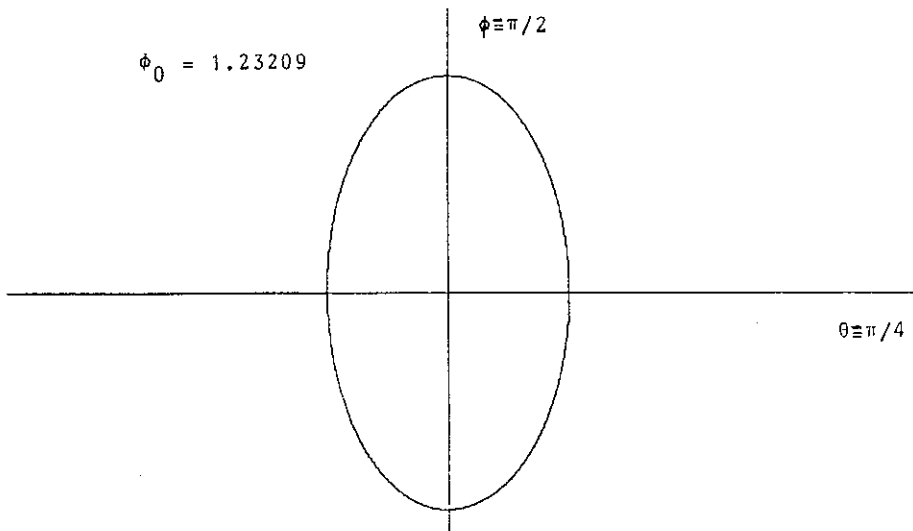


Figura 5

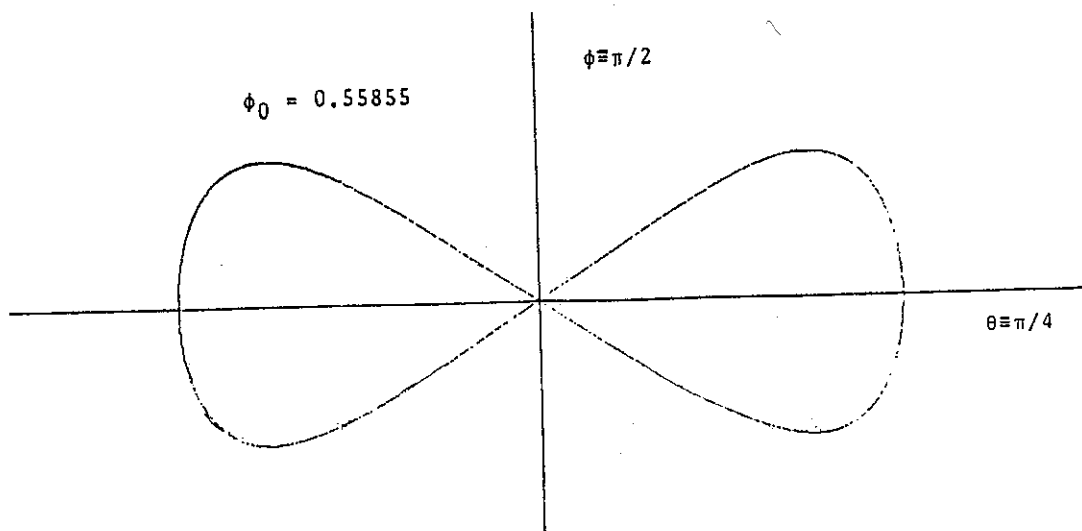


Figura 6

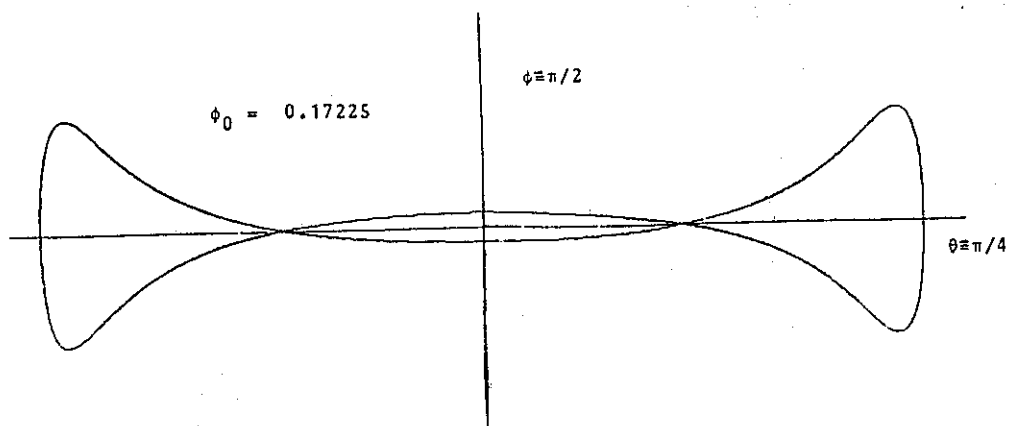


Figura 7

As figuras 5,6 e 7 foram desenhadas com os dados tirados do sistema (4) no DEC-10, cujos valores para ϕ_0 foram 1.23209, 0.55855 e 0.17225 respectivamente. Observamos que a precisão usada na subrotina foi de 10^{-5} .

Para descobrir esses valores iniciais, também utilizamos um PC-XT com o software Phaser [K].

Observamos que na figura 5 a curva geratriz do 3-toro mínimo em S^4 não apresenta auto-interseções, respectivamente. Na realidade, usando as mesmas técnicas de Hsiang, estabelecemos em [B-L] um teorema que trata dessas auto-interseções, o qual reproduzimos a seguir:

Teorema. Para cada $n = 1, 2, 3, \dots$, existe uma solução periódica de (2) de modo que a curva fechada que gera o 3-toro mínimo de S^4 tem $n - 1$ pontos de auto-interseção. Em particular, o 3-toro gerado pela curva da figura 5, mínimo em S^4 , não tem auto-interseções.

Comentário final. A análise do sistema (2) nos sugere que a classificação dos 3-toros mínimos em S^4 , invariantes por $SO(2) \times SO(2)$, é, precisamente a do teorema. A demonstração desse fato está incompleta do ponto de vista teórico, porém todo o trabalho feito no computador serve para evidenciar nossa expectativa.

Referências

- [B-C-H] A. Back, M.P. do Carmo e W.Y. Hsiang
On Some Fundamental Equations in Equivariant Geometry, preprint.
- [B-L] Fabiano Brito e Maria Luiza Leite
Minimal T^3 Embedded in S^4
preprint 1985
- [dC1] Manfredo do Carmo
A Matemática das Películas de Sabão
Ciência hoje, 11, vol 2, 1984
- [dC2] Manfredo do Carmo
Differential Geometry of Curves and Surfaces
Prentice Hall Inc., 1976

- [G] Jonas de Miranda Gomes
A Curvatura Média das Suiperfícies II
Matemática Universitária 2, 20-48, 1985
- [H] W.Y. Hsiang
Minimal Cones and the Spherical Bernstein Problem I
Annals of Math. 118, 61-73,1983
- [K] H. Koçak
Phaser
Springer Verlag, New York, 1986
- [N] Barret O'Neill
Elementary Differential Geometry
Academic Press, New York, 1966
- [Na] Nag
DEC 10 - Single Precision Fortran
Mark 7, 1980