

Sobre o Teorema de Arzelá

Raymundo Alencar
Instituto de Matemática - UNICAMP
13081 - Campinas, SP

§1 - Introdução

A maioria dos textos sobre Integral de Riemann demonstra o seguinte teorema de convergência :

“Seja (f_n) uma sequência de funções reais, definidas e integráveis num intervalo $[a, b]$. Se (f_n) converge uniformemente para f em $[a, b]$ então f é integrável e vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx ”,$$

O objetivo destas notas é apresentar uma demonstração elementar do teorema de Arzelá, que é uma versão do teorema acima, mas com hipótese menos restritiva, isto é, supõe-se que (f_n) convirja pontualmente para f e que esse limite seja integrável a Riemann. Exemplos simples como $f_n(x) = x^n, 0 \leq x \leq 1$, mostram o grau de restrição da hipótese do teorema enunciado; de fato,

$$\text{para } x, 0 \leq x < 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0;$$

$$\text{para } x = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 1;$$

portanto, a função limite é: $f(1) = 1$ e $f(x) = 0$ para $0 \leq x < 1$. Claramente, a convergência da sequência (f_n) não é uniforme, pois se fôssemos ter por limite uma função contínua, o que não é o caso, logo o teorema enunciado não se aplica. Entretanto é fácil ver que:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{n+1} \text{ e } \int_0^1 f(x) dx = 0,$$

verificando assim a tese do teorema, uma vez que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

A motivação para escrever estas notas surgiu quando ministrávamos uma disciplina de Análise para alunos do curso de Bacharelado em Matemática e Matemática Aplicada do IME - USP em 1986. O programa da disciplina, entre outros tópicos, continha os teoremas de convergência da Integral de Riemann. Depois de selecionar uma bibliografia para a disciplina, verificamos que o teorema de Arzelá constava no livro de Bartle [3], "aparentemente" com uma demonstração. Ao iniciar o curso, fizemos um resumo dos tópicos que seriam abordados, destacando, com certa ênfase, que iríamos demonstrar o teorema de Arzelá. Embora o autor Bartle demonstre um lema preparatório para o teorema, com surpresa constatamos que ele omitia explicitamente um ponto fundamental na demonstração. Ao término do semestre havíamos elaborado uma primeira versão destas notas, onde usávamos sequências monótonas construídas a partir da sequência original do teorema. Após uma pesquisa bibliográfica sobre o assunto constatamos quão extensa era a lista de trabalhos dedicados ao Teorema de Arzelá. Para se ter uma idéia dos matemáticos que se preocuparam com o assunto, citamos como exemplo os nomes de F. Riesz, L. Bieberbach, E. Landau, F. Hausdorff e W. F. Eberlein. Concluindo este parágrafo, diríamos que, além da curiosidade, o que nos levou a escrever estas notas foi o intuito de apresentar uma demonstração acessível do Teorema de Arzelá para o aluno que não venha a estudar a teoria de integração de Lebesgue. Embora seja um simples corolário do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, o Teorema de Arzelá é suficiente em muitas aplicações onde se costuma invocar o teorema de Lebesgue.

A demonstração de Arzelá data de 1885 e por ser anterior ao advento da Teoria de Integração de Lebesgue (1905), percebe-se a sua real importância para a época. Um fato curioso é que a demonstração original continha uma incorreção, que foi sanada ainda no mesmo volume de publicação, mas fora de sequência (veja [1]).

Ao longo do tempo, apareceram diversas demonstrações do Teorema de Arzelá e muito raramente incluídas em livros e textos e quando incluídas, dificilmente poderiam ser consideradas ele-

mentares, como pode ser visto por exemplo no livro de T. Apostol [2].

Mais recentemente, H. Kestelman (1970) e J. Lewin (1986) conseguiram demonstrações elementares do Teorema de Arzelá, no sentido de que pouco da linguagem da Teoria da Medida de Lebesgue é usada.

Nestas notas apresentamos uma variação da demonstração de Lewin, onde, diferentemente de Kestelman e Lewin, fazemos uso de uma propriedade da integral de Riemann (Lema 1) que permite uma demonstração também elementar do Teorema de Arzelá, sem necessidade de considerar outras funções senão aquelas da própria seqüência original do teorema.

§2 – O Teorema de Arzelá

No que segue, a única integral considerada é a integral de Riemann. Além das propriedades elementares dos conjuntos e dos números reais (\mathbb{R}), admitimos a seguinte forma da completividade dos reais:

“se (H_n) é uma seqüência decrescente $(H_n \supset H_{n+1})$ de subconjuntos não vazios, fechados e limitados de \mathbb{R} , então $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \neq \emptyset$ ”.

Teorema (Arzelá). *Seja (f_n) uma seqüência de funções definidas e integráveis em $[a, b]$ tais que*

$$\|f_n\| = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x)| \leq M$$

para todo n . Se (f_n) converge pontualmente para uma função f , integrável em $[a, b]$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$

Observação: Afirmamos que o teorema estaria provado se o provássemos para seqüências (g_n) de funções não negativas convergindo para zero. De fato, supondo provado para tais

sequências, tomamos $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$, cujo limite é a função nula. Teríamos então $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = 0$ e observando que $-g_n(x) \leq (f_n(x) - f(x)) \leq g_n(x)$, obtemos:

$$-\int_a^b g_n(x) dx \leq \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx \leq \int_a^b g_n(x) dx$$

portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dx = 0$, logo $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$.

Para a demonstração do teorema precisamos do conceito de conjunto elementar e de dois lemas.

Definição: Um conjunto $E \subset \mathbb{R}$ se diz elementar se for a união finita de intervalos limitados.

Observação: A um intervalo I de extremos a e b , $a \leq b$, associamos naturalmente uma medida que é o seu comprimento $b - a$. Agora, se E é um conjunto elementar, sempre é possível escolher intervalos I_i , $1 \leq i \leq n$, de extremos a_i e b_i com $a_i \leq b_i$ e $b_i \leq a_{i+1}$ tais que $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$. A escolha dos I_i como acima assegura que $I_i \cap I_j$, $i \neq j$, seja um conjunto com um único elemento ou o vazio; dessa forma podemos estender o conceito de medida para os conjuntos elementares mediante a definição seguinte.

Definição: Se $E = \bigcup_{i=1}^n I_i$ é um conjunto elementar, definimos a medida de E , denotada por $m(E) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$, onde os a_i e b_i são os extremos dos intervalos I_i , conforme a observação acima.

É fácil de se convencer da validade das seguintes propriedades dos conjuntos elementares:

- (a) a classe dos conjuntos elementares é fechada para a união, intersecção e diferença.

- (b) se E_1 e E_2 são elementares disjuntos, então: $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$.
- (c) se E, E_1 e E_2 são elementares tais que $E \subset E_1 \cup E_2$, então $m(E) \leq m(E_1) + m(E_2)$.
- (d) se E é elemental e $\epsilon > 0$, então existe $F \subset E$ elemental e fechado tal que $m(E) - \epsilon < m(F)$.

Para facilidade do leitor, vamos recordar a definição da integral de Riemann através das somas de Riemann. Considere $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e pontos $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $i = 1 \dots n$ (pontos intermediários). Dada uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a soma de Riemann, indicada por $S(f, P)$, relativamente à partição P e aos pontos \bar{x}_i é a soma $S(f, P) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i$, onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Na notação acima está implícita a dependência de $S(f, P)$ relativamente à escolha dos pontos \bar{x}_i . Chamamos de norma da partição P ao número $|P| = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$.

Definição: Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada se diz integrável a Riemann se existir um número I com a seguinte propriedade: dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|S(f, P) - I| < \epsilon$ para toda partição P de $[a, b]$ com norma $|P| < \delta$ e para qualquer escolha dos pontos intermediários \bar{x}_i .

No caso em que o número I exista, ele será indicado por $\int_a^b f(x) dx$.

Cabe aqui observar que a definição acima é equivalente à definição da Integral de Riemann por somas inferiores e somas superiores (veja por exemplo [7], página 265).

Os lemas

Lema 1 (Bartle). Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrável com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se $\int_a^b f(x) dx = \alpha > 0$, então o conjunto $A = \{x \in [a, b] : f(x) \geq \frac{\alpha}{3|I|}\}$ contém um conjunto elemental E tal que $m(E) \geq \frac{\alpha}{3|I|}$.

Demonstração: Como f é integrável, dado $\epsilon = \frac{\alpha}{3}$, existe uma partição $P : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ de $[a, b]$ tal que $|S(f, P) - \alpha| < \frac{\alpha}{3}$, qualquer que seja a escolha dos pontos intermediários, logo $S(f, P) \geq \frac{2\alpha}{3}$.

Afirmamos que existe pelo menos um $i, 1 \leq i \leq n$ tal que $[x_{i-1}, x_i] \subset A$. Caso contrário, para cada i existiria $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que $f(\bar{x}_i) < \frac{\alpha}{3(b-a)}$ e portanto para essa escolha dos \bar{x}_i teríamos:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x_i < \frac{\alpha}{3(b-a)} \cdot \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\alpha}{3(b-a)} \cdot (b-a) = \frac{\alpha}{3},$$

uma contradição com o fato de que $S(f, P) \geq \frac{2\alpha}{3}$ para qualquer escolha dos pontos intermediários. Consequentemente, o conjunto N_1 definido por

$$N_1 = \{i : 1 \leq i \leq n : [x_{i-1}, x_i] \subset A\}$$

é não vazio.

Considere agora o conjunto $N_2 = \{i : 1 \leq i \leq n\} \setminus N_1$ e observe que para cada $j \in N_2$, existe $\bar{x}_j \in [x_{j-1}, x_j]$ tal que

$$(*) \quad f(\bar{x}_j) < \frac{\alpha}{3(b-a)}.$$

Escrevendo a soma de Riemann $S(f, P)$ como $S(f, P) = \sum_{i \in N_1} f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \sum_{i \in N_2} f(\bar{x}_i) \Delta x_i$ e escolhendo os $\bar{x}_j, j \in N_2$, conforme (*) obtemos:

$$\frac{2\alpha}{3} \leq S(f, P) \leq \sum_{i \in N_1} f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \sum_{j \in N_2} \frac{\alpha}{3(b-a)} \Delta x_j \leq \sum_{i \in N_1} f(\bar{x}_i) \Delta x_i + \frac{\alpha}{3},$$

ou seja, $\frac{\alpha}{3} \leq \sum_{i \in N_1} f(\bar{x}_i) \Delta x_i \leq \|f\| \sum_{i \in N_1} \Delta x_i$, portanto

$\frac{\alpha}{3\|f\|} \leq \sum_{i \in N_1} \Delta x_i$. Basta agora observar que o conjunto elemen-

tar $E = \bigcup_{i \in N_1} (x_{i-1}, x_i)$ tem medida $m(E) = \sum_{i \in N_1} \Delta x_i \geq \frac{\alpha}{3\|f\|}$.

Lema 2: (Lewin). *Seja (A_n) uma seqüência decrescente de subconjuntos limitados de \mathbb{R} tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \phi$. Se para cada n definirmos α_n como $\alpha_n = \sup\{m(E) : E \subset A_n, E \text{ elementar}\}$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$.*

Demonstração: Do fato que $A_n \supset A_{n+1}$, segue-se que a seqüência (α_n) é decrescente. Suponhamos (α_n) não convergente a zero, logo existe $\delta > 0$ tal que $\alpha_n > \delta$ para todo n . Pela propriedade (d) dos conjuntos elementares, para cada n existe um conjunto elementar E_n fechado e contido em A_n tal que $m(E_n) > \alpha_n - \frac{\delta}{2^n}$. Consideremos agora os seguintes conjuntos fechados; $H_n = \bigcap_{i=1}^n E_i$ e provemos que cada H_n é não vazio, chegando assim a uma contradição, uma vez que

$$\phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Para isto observamos:

(1) se E é elementar contido em $A_n \setminus E_n$, então $m(E) + m(E_n) = m(E \cup E_n) \leq \alpha_n$ e portanto

$$m(E) \leq \alpha_n - m(E_n) \leq \alpha_n - \left(\alpha_n - \frac{\delta}{2^n}\right) = \frac{\delta}{2^n}.$$

(2) se E é elementar contido em $A_n \setminus H_n$ então E está contido no complementar $\complement H_n = \complement \bigcap_{i=1}^n E_i = \bigcup_{i=1}^n \complement E_i$, logo E se escreve como:

$$E = E \cap \left(\bigcup_{i=1}^n \complement E_i\right) = \bigcup_{i=1}^n (E \cap \complement E_i) = \bigcup_{i=1}^n (E \setminus E_i).$$

Lembrando que a sequência (A_n) é decrescente e portanto $E \subset A_i, i = 1, \dots, n$, temos que $E \setminus E_i$ é um conjunto elementar de $A_i \setminus E_i, i = 1, \dots, n$. Portanto, por (1) obtemos:

$$m(E) \leq \sum_{i=1}^n m(E \setminus E_i) \leq \sum_{i=1}^n \frac{\delta}{2^i} < \delta.$$

Mas para cada n , como $\alpha_n > \delta$, o conjunto A_n deve conter um conjunto elementar F com $m(F) > \delta$; conseqüentemente, H_n não pode ser vazio, pois se fosse α_n não seria supremo. Obtemos então a contradição anunciada, pois pela completividade da reta temos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n \neq \phi$.

Demonstração do teorema. Pela observação após o enunciado do teorema, podemos supor $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$ e $f = 0$. Devemos mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0$.

Suponhamos o contrário, isto é, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx \neq 0$. Então existe $\alpha > 0$ e uma subsequência (f_{n_k}) de (f_n) tal que,

$$\int_a^b f_{n_k}(x) dx > \alpha, k = 1, 2, \dots$$

Para cada k , considere o conjunto:

$$A_k = \{x \in [a, b] : f_{n_i}(x) \geq \frac{\alpha}{3(b-a)}, \text{ para algum } i, i \geq k\}.$$

É fácil ver que (A_k) é uma sequência decrescente. Além disso temos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \phi$, pois se existisse $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ teríamos $f_{n_k}(x) \geq \frac{\alpha}{3(b-a)}$ para uma infinidade de índices k , o que implicaria a sequência $(f_n(x))$ admitir uma subsequência não convergente a zero, uma contradição, pois, $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

Agora, pelo lema 1, cada A_k contém um conjunto elementar E_k com $m(E_k) \geq \frac{\alpha}{3M}$. Por outro lado, pelo lema 2, temos que $\lim_{k \rightarrow \infty} m(E_k) = 0$, uma contradição; logo devemos ter

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = 0, \text{ provando então o Teorema de Arzelá.}$$

Referências

- [1] C. Arzelá
sulla integrazione per serie
Atti Della Accademia Nazionale Dei Lincei - Rendiconti,
Rome (1885). 532 - 537, 596 - 599.
- [2] T. Apostol
Mathematical Analysis
Addison-Wesley Publishing Company. (1965).
- [3] R. Bartle
The Elements of Real Analysis
John Wiley & Sons. (1964).
- [4] W. Eberlein
Notes on Integration I: The Underlying Convergence Theo-
rem
Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. X,
357 - 360. (1957).
- [5] H. Kelstelman
Riemann Integration of Limit Functions
American Mathematical Monthly. (February - 1970).
- [6] J. Lewin
A Truly Elementary Approach to the Bounded Convergence
Theorem
American Mathematical Monthly. (May - 1986).
- [7] Elon L. Lima
Curso de Análise
Projeto Euclides.
- [8] W. Luxemburg
Arzelá's dominated convergence theorem for the Riemann
integral
American Mathematical Monthly, 78. (November - 1971).