Notícias

Matemática Universitária N. 8, Dezembro de 1988, 1 - 25.

Responsáveis: Derek Hacon e Laura Martignon

Prêmio de Matemática
da
Academia de Ciências do Terceiro Mundo
Beijing, China
14 de setembro de 1987

A Academia de Ciências do Terceiro Mundo, TWAS (Third World Academy of Sciences), concede todos anos a partir de 1986 um prêmio em cada uma das áreas: Matemática, Física, Química, Biologia.

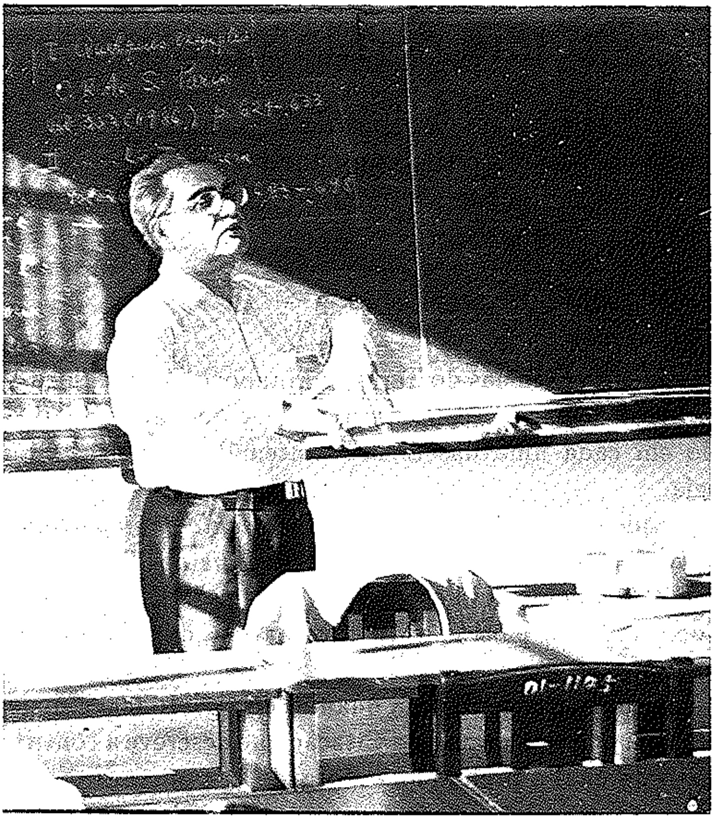
O prêmio é individual, *"em reconhecimento de importante contribuição à ciência feita por cidadão de pais do Terceiro Mundo e que habitualmente resida em um um deles"*. Esses paises compreendem todos os paises da America Latina, da Africa e da Asia, exceto Japão.

O prêmio consiste em uma quantia de Us$ 10.000 e mais uma medalha em que está gravada a Citação que descreve a contribuição em razão da qual o prêmio foi outorgado.

Os quatro prêmios são entregues em seção solene, para o grande público da TWAS. Posteriormente cada um dos agraciados fará, para um público mais restrito, uma conferência de uma hora acerca do seu trabalho objeto da Citação.

Em 14 de setembro de 1987, realizou-se em Beijing, China, a solenidade da entrega dos prêmios a 1986. A reunião realizou-se na "Grande Sala de Povo" na presença de mais de mil pessoas dentre as quais o Presidente da China, Li Xianian e o seu Primeiro Ministro, Zhao Ziyang. Ambos discursaram

O prêmio da Matemática 1986 coube ao brasileiro Maurício Matos Peixoto, pesquisador titular do IMPA, presidente da Academia Brasileira de Ciências.



Prof. M.M.Peixoto durante sua conferência em Beijing

Publicamos a seguir a versão em portugues do discurso que o Prof. Peixoto proferiu em inglês naquela ocasião:

Senhoras e Senhores,

sinto-me enormemente honrado por usar da palavra nesse encontro e é minha tarefa aqui comenter o trabalho pelo qual este Prêmio for outorgado. Refiro-me pois, à citação lida no pódio, esta manhã pelo Prof. S.S.Chern na cerimônia de abertura e gravada na medalha que me foi então, entregue pelo Presidente Abdus Salam. Nele se lê:

> *"Pelo seu estudo pioneiro e fundamental da èstabilidade estrurtural dos Sistemas Dinâmicos, em especial, por provar que fluxos em superfícies sãogenericamente estruturalmente estáveis".*

Oferecerei então algumas reflexões sobre este trabalho, como se originou e de que modo foi instrumento para colocar, em sólida base, na linguagem da Teoria dos Conjuntos, a teoria qualitativa de fluxos em variedades diferenciáveis, com objetivos razoavelmente bem definidos e problemas que apresentam uma certa unidade. O ponto de vista genérico aparece, então, naturalmente, e é tratado, com sucesso, em dimensão 2. Estas reflexões levaram-me a certas recordações pessoais incluidas aqui na crença de que possuem algum valor intrínseco ou contribuem para esclarecer o contexto do meu trabalho.

Primeiramente gostaria de assinalar que este trabalho sobre estabilidade estrutural foi realizado basicamente num certo número de artigos mencionados abaixo e que um deles foi um trabalho conjunto com minha primeira mulher Marília, que não viveu para ver o fim dessa aventura. Foi grande, contudo, sua influência naqueles dias dourados, decisivos e já distantes, do outono de 1957 em Princeton.

Como mencionei anterioramente, o objeto do nosso estudo é a teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias, também chamadas campos vetoriais, fluxos ou sistemas dinâmicos. Esta teoria originou-se numa série de trabalhos de Poincaré [30] escritos no período 1881-1886 sob o título geral *"Sur les courbes définies par une équation differentielle"*. Ali, pela primeira vez, considera-se uma equação diferencial ordinária do ponto de vista da geometria do conjunto de suas trajetórias. O Teorema de Poincaré-Bendixson reflete bem esse modo de olhar para as equações diferenciais.

Na esteira de Poincaré temos um acréscimo importante à teoria qualitativa na extensa obra de G.D.Birkhoff [6], realizada nos primeiros quarenta anos do nosso século. Os conjuntos α- e ω-limites e os conjuntos não errantes são alguns dos conceitos introduzidos por ele.

A estes resultados qualitativos de Poincaré e Birkhoff deve-se acrescentar a teoria da estabilidade criada por Liapounov [15] no final do século passado. Esta teoria, fortemente analítica em seus métodos, tem também um sabor nitidamente qualitativo.

Em 1926, Hilbert [10, p.170] escreveu a famosa afirmação:

> *"Ninguém vai nos expulsar do paraíso que nos foi legado por Cantor"*

rendendo assim um tributo imenso e único a um matemático.

Paraíso ou não, a frase grandiosa reflete o fato de que, desde o fim do século passado, vem ocorrendo uma tendência lenta e generalizada de situar todos os ramos da Matemática no contexto da Teoria dos Conjuntos.

Em meados do nosso século, essa tendência já ia avançada, com ênfase em objetos como relações de equivalência, estruturas etc.

A esse respeito impõe-se o nome de Bourbaki, devido à sua corajosa tentativa de, de algum modo, controlar ou dirijir este vasto e diversificado movimento. Não obstante, a teoria qualitativa de Poincaré e Birkhoff, mantendo-se à margem desse desenvolvimentos e carente de objetivos bem definidos, perdia seu brilho. Esclareço isso fazendo duas observações:

(I) Nenhuma estrutura – um espaço – foi construída a partir do conjunto de equações diferenciais ordinárias.

(II) Tanto Poincaré quanto Birkhoff nunca tornaram preciso o que deveria ser entendido por equivalência qualitativa de equações diferenciais.

Poincaré tinha pressentimentos a respeito de ambos os pontos. Com relação a (I), Poincaré fala [30] em propriedades que são verdadeiras "em geral", i.e., "para a maioria dos valores" dos coeficientes, os dados sendo polinômicos. Quanto a (II), Poincaré tratou do assunto explicitamente numa conferência feita em Roma em 1908 [31, pg.177]. Nela, ele acentua a necessidade de se encontrar uma "transformação", que desempenhe, em relação às equações diferenciais, o mesmo papel que as transformações biracionais têm em relação às curvas algébricas. Poder-se-ia, então, colocar na mesma classe todas as equações transformadas de uma dada equação. Suas são as palavras:

> *"... nous ne seront pas satisfaits que quand on aura trouvé un certain groupe des transformations (par example de transformations de Cremona) qui jouera par rapport aux équations différentielles le même rôle que le groupe de transformations birationelles pour les courbes algêbriques. Nous pourrons alors ranger dans une même classe toute les transformées d'une même equation. Nous aurons encore pour guide l'analogie avec une théorie déjà faite, celle des transformations birationelles et du genre d'une courbe algébrique".*[2]

Na linguagem de hoje, ele desejava classificar equações diferenciais módulo alguma relação de equivalência. Tanto quanto eu saiba, esta observação de Poincaré sobre a necessidade de uma relação de equivalência para equações diferenciais não-lineares gerais – uma visão penetrante – foi ignorada pelos autore posteriores até o dia de hoje. É provavel que isto tenha ocorrido devido ao fato de que em 1909 o natural seria considerar como relação de equivalência ("a transformação") aquilo que hoje denominamos um difeomorfismo analítico. E sabemos que isso complicaria as coisas enormemente, pois as classes de equivalência seriam por demais numerosas.

O passo seguinte foi dado por H.Kneser [12] em um artigo datado de 1924, onde se encontra uma definição precisa da equivalência qualitativa de duas equações diferenciais. Ele considera equações diferenciais num toro T^2 e diz que duas delas, digamos X e Y, são equivalentes se houver um homeomorfismo $h : T^2 \to T^2$ que leva trajetórias de X em trajetórias de Y. Observe-se que h é apenas C^0 e opera, não nas próprias equações

[2](...Nós só eastaremos satisfeitos quando se tiver achado um certo grupo de transformações (a exemplo das transformações de Cremona) que desempenhará em relação às equações diferenciais o mesmo papel que o grupo das transformações biracionais desempenha para as curvas algébricas. Podermos, então agrupar numa mesma classe todas as transformadas de uma mesma equação. Teremos ainda, por guia, a analogia com uma teoria já feita, a das transformações biracionais e do gênero de uma curva algébrica.)

mas nas suas trajetórias, Uma vez que as trajetórias são curvas orientadas, isto significa que h leva curvas orientadas em curvas orientadas. Dizemos, então, que X e Y são topologicamente equivalentes e escrevemos $X \sim Y$.

A introdução deste conceito de equivalência topológica representa um passo decisivo em direção à colocação da teoria qualitativa no contexto da Teoria dos Conjuntos.

A equivalência topológica foi basicamente redescoberta por A.Andronov – L.Pontrjagin em 1937, numa nota fundamental de 4 páginas [2] onde eles introduzem o conceito de estabilidade estrutural.

Dada a sua importância aqui, dou a seguir, uma cuidadosa apresentação das origens desse conceito. Na nota mencionada, Andronov–Pontrjagin consideram um sistema dinámico
$\dot{x} = P(x,y)$; $\dot{y} = Q(x,y)$ definido num disco D^2 no plano (x,y), o campo de vetores entrando transversalmente pela fronteira. Diz-se que este sistema é grosseiro ("grossier" porque a nota foi escrita em francês) se, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, cada vez que $p(x,y)$, $q(x,y)$ e suas derivadas primeiras tenham valores absolutos menores do que δ, o sistema perturbado $\dot{x} = P + p$, $\dot{y} = Q + q$ é topologicamente equivalente ao sistema original de tal modo que o homeomorfismo $h : D^2 \to D^2$ que preserva trajetórias seja ε-pequeno. Supõe-se que os dados sejam analíticos. Eles, então, enunciam sem demonstração, uma condição necessária e suficiente para que o sistema seja grosseiro. Usando a nomenclatura de hoje, as condições são as seguintes:

(1) que as singularidades e as órbitas fechadas sejam hiperbólicas.

(2) que não haja trajetórias conectando pontos de sela.

As condições acima excluem a possibilidade de um comportamento complicado para as trajetórias de um sistema grosseiro. Em particular, existe apenas um número finito de singularidades e órbitas fechadas,.

Em 1937, A.Andronov e C.Chaikin publicaram um livro em russo – Teoria das Oscilações – onde as equações grosseiras são mencionadas repetidas vezes. A obra reflete o trabalho de um grupo de pessoas que na União Soviética, são conhecidas como a

"Escola Gorki" [3]. O livro reproduz, num apêndice, o conteúdo da nota de Andronov-Pontrjagin. Em 1949, Lefschetz dirigiu os trabalhos da tradução desse livro para o inglês e traduziu *"grosseiro"* por *"estruturalmente estavel"*.

Ao fazê-lo, Lefschetz prestou uma importante contribuição ao assunto, revelando o verdadeiro significado do novo conceito, a saber, uma interação das duas noções básicas de estabilidade e comportamento qualitativo, no sentido de equivalência topológica. Além disso, o novo termo sugere muitas outras possibilidades.

Num artigo de 1952, De Baggis [7], aluno de Lefschetz, fornece o essencial das provas que faltavam na nota de Andronov-Pontrjagin e observa qu não é necessário supor que as equações sejam analíticas; C^1 é suficiente. Foi através desse artigo que tomei conhecimento da estabilidade estrutural, num seminário da Escola Nacional de Engenharia, no Rio de Janeiro, por volta de 1955.[3]

Em setembro de 1957, fui para a Universidade de Princeton trabalhar com Lefschetz em estabilidade estrutural. Nessa época, eu já estava convencido de que, para ir além de Andronov-Pontrjagin, era necessário adotar o ponto de vista do espaço funcional. Isto significava introduzir o espaço de Banach B de todos os campos vetoriais e examinar como o conjunto dos estruturalmente estáveis se situa dentro de B. Quando expliquei isto num seminário, Lefschetz percebeu do que se tratava e se entusiasmou. Ele me interrompeu e disse:

> *"Agora você pode fazer todo o tipo de pergunta sobre estabilidade estrutural"*

E assim foi. Comecei imediatamente a escrever as consequências desta idéia simples e, ao fim de seis meses, terminava o manuscrito do meu primeiro artigo sobre estabilidade estrutural. Lefschetz era então editor do "Annals of Mathematics" e convidou-me a publicá-lo lá. Mais tarde ele escreveu [13, pg.10] que a introdução do espaço B e do Teorema da Densidade (6) abaixo enriqueceu enormemente o problema da estabilidade estrutural.

Naquele artigo, parti da situação no disco D^2 considerado por Andronov-Pontrjagin e estabeleci o seguinte:

[3]N. da R. Participaram desse seminário, dentre outros, Djairo Guedes de Figueredo, Lindolpho de Carvalho Dias e Mario Henrique Simonsen

(3) O C^1 espaço de Banach B de todos os sistemas dinâmicos que atravessam a fronteira de D^2 transversalmente.

(4) O ε que aparecia na definição de Andronov-Pontrjagin é desnecessário. Se for eliminado, ainda obtemos uma definição equivalente. Ela é simplesmente: $X \in B$ é estruturalmente estável sempre que existe uma vizinhança U de X tal que, se $Y \in U$, então $X \sim Y$, i.e., existe um homeomorfismo de D^2 sobre si mesmo levando trajetórias de X sobre trajetórias de Y. Esta é, hoje em dia, a definição usual de estabilidade estrutural.

(5) Estendi, então, a definição acima ao disco n-dimensional D^n. O conjunto Σ de todos os sistemas estruturalmente estáveis é automaticamente aberto em B – este é o ponto importante da nova definição – e, em seguida, provei um teorema sobre as componentes conexas de Σ.

(6) Se $n = 2$, então temos que Σ, que é aberto em B, é também denso nele. Assim tanto (I) como (II) mencionados acima, foram levados em consideração ou seja, temos um espaço B de equações diferenciais e uma relação de equivalência sobre ele, a equivalência topológica $\sim$. Os pontos interiores das classes de equivalência de B módulo $\sim$ são os sistemas estruturalmente estáveis. Estes, se $n = 2$ têm características qualitativas muito simples e sua totalidade Σ é aberta e densa em B.

As consequências naturais de [22] foram [23] e [24]. Em [23], tratamos da estabilidade estrutural em D^2 substitutindo a condição de transversalidade na fronteira por condições mais gerais que permitem certas tangências.

As novas condições de fronteira são densas no espaço B' de todos os sistemas definidos em D^2, enquanto a condição de transversalidade óbviamente não é. Isto foi causa de uma certa perplexidade de minha parte quanto a propria definição do espaço sobre o qual se poderia provar a densidade da estabilidade estrutural.

Em [24], prova-se que em qualquer esfera S^n há infinitas classes de equivalência distintas de sistemas estruturalmente estáveis. O trabalho descrito acima realizei durante minha permanência em Princeton no periodo 1957-1958.

Lefschetz ofereceu-me uma mesa no seu gabinete espaçoso e conversávamos longamente sobre Matemática, matemáticos e tudo o mais que existe debaixo do sol.

Tornamo-nos verdadeiros amigos tanto quanto poderiam permitir sua eminênia e, também, o fato de que, aos 73 anos ele tinha mais do que o dobro da minha idade.

Lefschetz gostava muito de Pontrjagin e contou-me que aos 14 anos, Pontrjagin perdera as duas vistas num acidente com um fogão. O próprio Lefschetz sofrera um acidente em 1910, aos 26 anos e tivera ambos os braços amputados pouco abaixo dos cotovelos. Decidiu, então, tornar-se matemático.

Na verdade, antes do verão de 1958, Lefschetz encontrara Pontrjagin apenas em algumas ocasiões durante um congresso em Moscou no começo da década de trinta. Conversaram longamente sobre Matemática e Lefschetz ficou tremendamente impressionado. Referia-se ao jovem Pontrjagin daqueles dias em termos hiperbólicos:

> *"Tudo o que ele tocava tornava-se ouro"*

Nenhum Midas septuagenário ele próprio, Lefschetz era, entretanto, ainda capaz de ter intuições profundas e vitais e de exprimilas de maneira encantadora.

Uma vez, antes de encontrar Smale, eu disse a Lefschetz que:

> *"O problema com a estbilidade estrutural é que ninguem se importa com ela".*

E ele:

> *"Não Maurício, isso não é problema, é sorte sua. Trate de trabalhar o mais rápido e duramente que puder nesse assunto porque o dia virá em que você não vai compreender uma só palavra do que eles estarão dizendo sobre estabilidade estrutural. Isso aconteceu comigo em Topologia".*

Mas nem todos viam a coisa dessa forma. Durante o Congresso Internacional de Matemáticos de Edinburgh, em 1958, Lefschetz tomou a iniciativa de promover um encontro meu com Pontrjagin e ofereceu-se para servir de intérprete inglês-russo. A idéia era que eu comunicasse a Pontrjagin o conteúdo de [22] que não fora ainda publicado.

Do meu ponto de vista, o encontro foi um fiasco. Pontrjagin não estava interessado no assunto, alegando que a estabilidade estrutural não poderia existir além do disco D^2.

Em particular, não poderia existir nem mesmo no toro T^2 porque no fluxo linear correspondente o tipo topológico mudaria se o coeficiente angular mudasse de racional para irracional.

Ignorava ele que sua própria criatura já abria as asas e muito em breve estaria voando alto e longe.

Um matemático que acreditou na estabilidade estrutural foi Withney que, a seu modo reservado, deu uma contribuição substancial a [22]. A prova de um de seus lemas me foi comunicada por ele. Só muitos anos mais tarde é que percebi que dois anos antes disso, em 1955, Withney provara para aplicações $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um teorema que, hoje, pode ser expresso afirmando-se que as aplicações estruturalmente estáveis formam um subconjunto denso e aberto do espaço de todas as aplicações.

Outro crente, que se tornaria a figura central da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias foi Steve Smale. Fui apresentado a ele por Elon Lima em Princeton no verão de 1958 logo depois que voltei de Edinburgh. Antes disso já ha algum tempo e através do próprio Lima, eu estava bem ciente de que Smale era uma grande promessa. Mais tarde, em notas reminiscentes, Smale escreveu sobre nosso encontro em Princeton [36, p.148] e contra sua reação ao lhe serem mostrados os resultados que deveriam aparecer no meu artigo no Annals:

> *"Através de Lefschetz, Peixoto interessou-se por estabilidade estrutural e mostrou-me seus próprios resultados sobre a estabilidade estrutural no disco D^2 (num artigo que deveria aparecer no "Annals of Mathematics,1959"). Entusiasmei-me imediatamente, não só pelo que ele estava fazendo, mas pela possibilidade de que, usando minha própria formação em Topologia, eu poderia estender seu trabalho à dimensão n".*

Assim começou o soberbo trabalho de Smale sobre sistemas dinâmicos, um trabalho que será lembrado aqui, apenas de passagem e na medida em que ajude a dar alguma perspectiva ao meu próprio.

Smale foi rápido em assinalar que todos os fatos anteriores sobre o disco D^2 podiam ser expressos sobre a esfera S^2 sem mais acréscimo. Eu já estava certo disso mas, não tendo nunca trabalhando em mais de um sistema de coordenadas, fiquei um tanto confuso e envolvido em provas complicadas.

Quando Smale me disse, que a coisa era direta,
perguntei: *"Direta, como?"*
e ele respondeu: *"Direta como uma flecha!"*

Isso descreve bem o modo vi Smale entrar nessa área: seu faro para o ponto principal, a força, a tensão e a velocidade que ele exibiu ao colocar seus conhecimentos de Topologia Diferencial na direção da estabilidade estrutural.

Podemos resumir os resultados mencionados acima em S^2 da seguinte maneira: seja $\mathcal{X} = \mathcal{X}(S^2)$ o espaço de todos os fluxos em S^2 com a topologia C^1. Um tal fluxo é estruturalmente estável se e sómente se as condições (1) e (2) acima forem satisfeitas. Além disso, se Σ for o conjunto de todos esses fluxos, então

(7) Σ é aberto e denso em $\mathcal{X}$;

(8) As classes de equivalência de Σ, módulo $\sim$, são passíveis de classificação.

Obtivemos assim uma visão penetrante das características qualitativas de todos os fluxos em S^2. Na verdade, temos o espaço $\mathcal{X}$ de todos os fluxos e uma relação de equivalência nele, bem na linguagem da Teoria dos Conjuntos.

O problema de descrever ou classificar as classes de equivalência de $\mathcal{X}$, módulo $\sim$, aparece então de forma natural. Isto é porém um problema sem esperanças. Já que qualquer conjunto fechado em S^2 pode ser o conjunto de singularidades de algum elemento de $\mathcal{X}$, nosso problema é mais complicado do que a classificação topológica dos conjuntos fechados em S^2, um problema intratável.

Com a estabilidade estrutural, entretanto, tudo se torna claro, no modo acima descrito: Σ é, num certo sentido, "quase todo" o

$\mathcal{X}$ e as classes de equivalência de Σ, módulo $\sim$, são perfeitamente tratáveis embora as de $\mathcal{X}$ módulo $\sim$, não o sejam.

Meu próximo passo foi estender este trabalho a variedades diferenciáveis compactas bi-dimensionais.

Seja $\mathcal{X} = \mathcal{X}^r(M^2)$, $r \geq 1$, o espaço de todos os fluxos em M^2 com a topologia C^r e seja Σ a totalidade de todas os esruturalmente estáveis. Em 1962 [25], apresentei a prova do seguinte:

Teorema Os fluxos estruturalmente estáveis são caracterizados pelas condições de Andronov-Pontrjagin acima mencionadas (1),(2) e mais a condição

(9) os conjuntos α e ω-limite de qualquer trajetória são ou uma singularidade ou uma órbita fechada.

Além disso, Σ é aberto e denso em $\mathcal{X}$.

Este resultado será referido daqui por diante simplesmente como o Teorema. Constitui o objeto desta palestra. Até agora, tentei explicar seus antecedentes. No que segue, prestarei alguns esclarecimentos técnicos e explicarei como se encaixa com os desenvolvimentos posteriores, dando, assim algumas perspectivas sobre o papel que ele desempenhou.

A principal dificuldade para provar este teorema deriva do "closing lema". Este problema, introduzido naquele mesmo artigo [25], pode ser formulado da seguinte maneira: dada uma trajetória recorrente não-trivial γ de um fluxo X e um ponto $p \in \gamma$, é possível encontrar uma pequena perturbação X', em classe C^r, tal que a trjetória de $X + X'$ por p seja fechada. O "closing lemma" C^0 é verdadeiro e trivial, mesmo em n dimensões. É um problema inteiramente local.

No caso $M^2 = T^2$ e se X não contiver singularidade, o "closing lemma" C^r, $r \geq 1$, é um assunto simples e foi provado em [25]. Em outros casos nunca consegui prová-lo, o problema continua em aberto. O que provei em [25], foi algo mais fraco, uma alternativa: se M^2 é orientável e as singularidades de X são hiperbólicas (nenhuma restrição neste contexto), então a trajetória de $X + X'$ por P será fechada ou une dois pontos de sela. Isto é suficiente para provar o Teorema. A prova é, então, válida para M^2 orientável e topologia C^r, $r \geq 1$. Ora, naquele mesmo artigo [25] fiz uma análise que pretende cobrir igualmente o caso em que M^2 é não-orientável, $r \geq 1$, mas esta parte do meu argumento está errada, como Charles Pugh me chamou a atenção em 1968. Até agora este erro ainda não foi corrigido. O caso não-orientável está coberto pelo "C^1 closing lemma" de Pugh [32]. Assim, no momento, o Teorema, para $r = 1$ está provado para qualquer M^2 orientavel ou não. Para $r > 1$, está provado para M^2 orientável. É fácil perceber que o argumento utilizado para o caso orientável também cobre o caso em que M^2 é a garrafa de Klein [16].

Carlos Gutierrez [8] demonstrou que este é também o caso quando M^2 é o toro com uma "cross-cap". No plano projetivo, toda recorrência é trivial. Em todos os outros casos não orientáveis o Teorema nunca foi provada para $r > 1$. Gutierrez [9] mostrou que, no caso $r = 2$, permitindo apenas uma perturbação local e não fazendo restrições sobre a natureza das singularidades, o "C^2-closing lemma" é falso. Em outras palavras, é impossivel provar o "C^2-closing lemma" por meio de uma perturbação local.

Saliente-se que a classe de diferenciabilidade é um assunto importante. Na verdade, em se tratando de fenômenos de bifurcação, tem-se que considerar $r \geq 4$ [42,26].

Cabe aqui fazer uma observação de carater histórico sobre a caracterização acima e o Teorema da densidade. Muitos anos após sua publicação em 1962, tomei conhecimento, através de traduções feitas do russo, de que para o caso simples e particular em que $M^2 = T^2$ e os fluxos não têm singularidade, a caracterização foi dada por Pliss em 1960 [29] e o Teorema da densidade por Arnold, em 1961 [5]; neste ultimo caso, o "espaço" aparece explicitamente.

Voltando ao Teorema, observa-se que as condições (1), (2) e (9) implicam que numa M^2 compacta, fluxos estruturalmente estáveis parecem muito semelhantes aos que o são em S^2 e, assim as classes de equivalência correspondentes são passíveis de classificação. Na verdade, só muito mais tarde, em 1973, é que fiz uma classificação completa, baseada no meu trabalho conjunto anterior de 1959 [23].

Tomando emprestada uma nomenclatura há muito usada na Geometria Algébrica, é hoje comum dizer que uma propriedade de um fluxo é genérica se for satisfeita por todos os fluxos de um conjunto de Baire (em particular, aberto, denso) de fluxos de $\mathcal{X}$. A razão para esta definição é que *aberto denso* é uma propriedade forte demais em dimensões superiores a 2.

A parte da densidade do Teorema diz que os fluxos em M^2 são genericamente estruturalmente estáveis, como aparece na Citação.

O Teorema oferece então uma visão de conjunto do espaço $\mathcal{X} = \mathcal{X}(M^2)$ dos fluxos em M^2 porque o conjunto Σ dos estruturalmente estáveis é bastante grande no interior de $\mathcal{X}$ e, para cada fluxo em Σ, compreendemos bem o que ocorre em toda M^2. Trata-se, realmente, de um teorema de análise global. E problemas gerais podem ser formulados na linguagem da Teoria dos Conjuntos.

Por exemplo, o estudo de bifurcações a um parâmetro de fluxos em M^2 pode ser considerado como o estudo da interseção de um arco em $\mathcal{X}$ com Σ. Jorge Sotomayor trabalhou sobre o assunto na sua tese no IMPA [42]. Mais uma vez, temos que adotar o ponto de vista genérico, perturbando o arco. Da mesma forma, pode-se fazer o estudo de bifurcação a 2 parâmetros e assim por diante.

Direi agora algumas palavras para explicar como o trabalho acima, em M^2, influenciou o desenvolvimente subsequente da teoria qualitativa de fluxos numa variedade diferenciável compacta M^n, $n > 2$. Tal como antes, temos o espaço dos fluxos, $\mathcal{X} = \mathcal{X}(M^n)$, $r \geq 1$, com a topologia C^r e o conjunto Σ de todos os estruturalmente estáveis. Aqui, encontramos uma situação bem mais complexa do que a de duas dimensões, com o aparecimento de fenômenos inteiramente novos. Daí resulta, para $n > 2$, não haver nada tão simples e preciso quanto o Teorema.

Um problema natural é o de expressar as condições (1), (2) e (9) de um modo que seja válido para dimensão $n \geq 2$ e, ao mesmo tempo, as propriedades correspondentes sejam genéricas, i.e., os fluxos que as satisfaçam formem um conjunto de Baire em $\mathcal{X}$.

Ora, a condição (1) permanece inalterada no caso $n \geq 2$. Quanto à condição (2), a maneira correta de expressá-la quando $n \geq 2$ é:

(2′) As variedades estáveis e instáveis das singularidades e órbitas fechadas se intersectam transversalmente.

Este fato foi descoberto por Smale [37], no começo de 1959 e apontou para o estreito relacionamento entre o nosso assunto e a teoria da transversalidade que Thom introduziu na Topologia Diferencial.

De algum modo relacionado com isto, está o artigo de Thom de 1949 [42'].

O fato que as propriedades (1), (2') são genéricas constitui o Teorema de Kupka-Smale [28]. Foi esse o tema da tese de Ivan Kupka, no IMPA, em 1963.

Observe-se que, para $n > 2$, um fluxo pode satisfazer (1), (2') e exibir uma infinidade de órbitas fechadas.

Quando existir apenas um número finito de órbitas fechadas, temos os fluxos introduzidos por Smale no artigo acima [37] e denominados fluxos de Morse-Smale por Thom, no começo da década de 1960. Os fluxos de Morse-Smale existem em qualquerM^2, $n \geq 2$ e foi provado, em 1970, num importante artigo de Jacob Palis e Smale [20], que eles são estruturalmente estáveis.Assim em cada variedade, Σ não é vazio.

Agora que se têm as condições (1),(2') na dimensão $n \geq 2$, pose-se desejar estender, da mesma forma, a condição (9).

Seja Γ a união de todas as singularidades e órbitas fechadas de um fluxo e Ω seu conjunto não errante. Lembremo-nos de que um ponto em M^n pertence a Ω quando qualquer vizinhança dele, transformada pelo fluxo, intersecta sua posição inicial para valores do tempo arbitrariamente grandes. Assim, o que toma o lugar de (9) é:

(9') $\Omega = \bar{\Gamma}$

Que esta propriedade seja genérica – na topologia C^1 – constituti um belo e difícil teorema de Pugh [33], consequência so seu "closing lemma".

Se $n = 2$, (1), (2'), (9') são equivalentes a (1), (2) e (9); nesse sentido, (9') é uma generalização de (9). O fato de que as propriedades (1), (2'), (9'), tomadas em conjunto, sejam uma propriedade genérica C^1 é normalmente mencionado como o Teorema da Densidade Geral. Agora que foram estendidas a $n \geq 2$ as propriedades que para $n = 2$ são características da estabilidade estrutural, é natural formular para $n > 2$ os seguintes problemas:

(i) caraterizar os fluxos estruturalmente estáveis em M^n.

(ii) será Σ denso em $\mathcal{X}$?

O problema (ii), na topologia C^r, $r \geq 1$, tem uma resposta negativa dada por Smale [38] em 1966: há uma certa M^4 na qual a estabilidade estrutural não é uma propriedade genérica. Em 1970, R.Williams [43] provou que o mesmo ocorre numa certa M^3. Assim, o carater genérico da estabilidade estrutural de fluxos é um fenômeno de 2 dimensões. Caso M^n seja compacta, para fluxos, mesmo quando $n = 2$, a estabilidade estrutural deixa de ser uma propriedade genérica [28']. O argumento é semelhante aos usados nos exemplos acima. Considerarei sempre M^n compacta.

O problem (i), para difeomorfismo e com a topologia C^1, foi resolvido recentemente, após os esforços de vários matemáticos, tal como indicado abaixo.

Aqui, será necessário uma disgressão a respeito dos difeomorfismos.

Primeiramente deve-se observar que o que foi feito acima para os fluxos pode ser facilmente traduzido para a linguagem dos difeomorfismos de uma variedade compacta diferenciável M^n.

Seja $\mathrm{Diff}^k(M^n)$ o espaço dos difeomorfismos de M^n com a topologia C^k. Um tal difeomorfismo f é dito estruturalmente estável se existir uma vizinhança V de f tal que, sempre que $g \in U$ se tenha $hg = fh$, h homeomorfismo, de M^n em M^n diz-se, então, que f e g são conjugados.

O estudo de um difeomorfismo em M^n é o mesmo que o estudo de um certo fluxo numa certa M^{n+1}, a suspensão do fluxo. Em muitos casos, o que pode ser feito para os difeomorfismos em M^n, pode ser transposto para fluxos em M^{n+1}, sem muitas dificuldades adicionais. Há boas razões para se estudar em profundidade os difeomorfismos como tais.

O Teorema acima aplica-se apenas quando $M^n = S^1$ e afirma que os difeomorfismos estruturalmente estáveis de S^1, Σ, são caracterizados por ter apenas um número finito de pontos periódicos, todos hiperbólicos, Σ é denso em $\mathrm{Diff}^r(S^1)$, $r \geq 1$.

Um divisor de águas na teoria qualitativa foi a descoberta de Smale de que seu difeomorfismo ferradura de S^2, contendo infinitos pontos periódicos e homoclínicos, é estruturalmente estável [39]. O comportamento homoclínico foi descoberto, na década de 1890, no problema dos 3 corpos por Poincaré, que assinalou suas caracterísicas qualitativas altamente complicadas. Nas mesms linhas desse, está o notável trabalho de D.Anosov [4] provando, entre outras coisas, que o fluxo geodésico em superfícies de curvatura negativa, considerado por Hadamard nos anos 1890, é estruturalmente estável. Assim, Smale e Anosov ampliaram consideravelmente o campo do conceito de estabilidade estrutural, mostrando que ele poderia absorver algumas dessas formas de recorrência complexas e mal compreendidas.

Com relação à consistência da estabilidade estrutural com infinitos pontos periódicos, cabe uma nota histórica.

Num artigo inicial Smale [37], conjecturou que os fluxos Morse-Smale são densos em $\mathcal{X}(M)$. Levinson, numa carta a Smale, obversou que o trabalho de Cartwright-Littlewood, além do seu próprio trabalho sobre a equação de Van der Pol com uma perturbação periódica, oferece um contra exemplo àquela conjectura já que mostra, num espaço a três dimensões, um fluxo, com uma infinidade de órbitas periódicas que não podem desaparecer por uma pequena perturbação C^1. A ferradura de Smale é uma conceitualização desta situação. Imediatamente após o difeomorfismo da ferradura, Thom mencionou verbalmente a várias pessoas o seu exemplo de difeomorfismo no toro. A aplicação linear $\bar{f}$ em $\mathbb{R}^2$, definida pela matriz unimodular $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ define um difeomorfismo $f : T^2 \to T^2$. A origem é um ponto fixo de f e as variedades estáveis e instáveis correspondentes têm inclinações irracionais, são densas em T^2 e encontram-se transversalmente. Assim os pontos homoclínicos e periódicos de f são densos em T. Este é, talvez, o exemplo mais facilmente compreendido de um difeomorfismo com infinitos pontos periódicos e que seja estruturalmente estável. O exemplo de Thom é o mais simples daquilo que hoje é denominado um difeomorfismo de Anosov. Teve importante papel no trabalho de Smale e Anosov, ver [40, p.764], [36, p.151], [3, p.86].

Voltando ao problema (i), para difeomorfismo, começamos com o importante trabalho de Smale – Sistemas Dinâmicos Diferenciáveis [40] – no qual se estabeleceu uma teoria geral de difeomorfismos em uma variedade diferenciável compacta $M = M^n$, incorporando as idéias de genericidade, comportamento qualitativo e estabilidade que provaram ser tão bem sucedidas em pequena dimensão. O objetivo original estabelicido neste artigo [40, p.748] era obter para $n > 1$ algum tipo de análogo do Teorema acima, com relação a alguma relação de equivalência mais fraca do que a conjugação, mas preservando, de algum modo, a estrutura de órbitas. Este objetivo foi abandonado há muito tempo já que nunca foi encontrada uma propriedade genérica que preserve num sentido razoável a estrutura das órbitas. Ver [41] e [40, nota 2]. Ainda assim, nesse artigo [40] permanece o núcleo da teoria qualitativa das equações diferenciais ordinárias e sua influência é tão generalizada que, depois dele, a area passou a ter o nome de "Sistemas Dinâmicos".

Alguns dos conceitos mais profundos da teoria qualitativa, tais como o Axioma A e os conjuntos básicos devem-se a Smale. A ele devemos também a Ω-estabilidade e a condição de transversalidade forte que é uma condição mais natural do que o axioma B, introduzido originalmente em [40].

Na teoria de Smale, o objeto de importância primordial é o conjunto não errante $\Omega = \Omega(f)$, associado a cada $f \in \mathrm{Diff}^r(M)$. Por definição, $p \in \Omega$ quando, dada qualquer vizinhança U de p, há uma infinidade de inteiros m com $U \cap f^m(U) \neq \emptyset$. Naturalmente Ω é fechado e invariante, $f(\Omega) = \Omega$.

Damos, agora duas definições cruciaias. Um difeomorfismo f determina uma estrutura hioperbólica em $\Omega = \Omega(f)$ (ou em qualquer conjunto invariante) quando houver uma decomposição invariante contínua do fibrado tangente TM, restrito a Ω, $TM/\Omega = E^s \oplus E^u$, $(Df)(E^s) = E^s$, $(DF)(E^u) = E^u$, de tal modo que Df seja uma contração em E^s e uma expansão em E^u, i.e., haja constantes $c > 0$, $0 < \lambda < 1$, tais que $\|(Df^m)|E^s(x)\| \leq c\lambda^m$, $\|(Df^{-m})|E^s(x)\| \leq c\lambda^m$, para todo $x \in \Omega, m \geq 0$. As normas são tomadas em alguma métrica Riemanniana.

Diz-se que um difeomorfismo f satisfaz o axioma A quando determina uma estrutura hiperbólica em Ω e, além disso, os pontos periódicos de f são densos em Ω (como no teorema de Pugh). Um difeomorfismo de Morse-Smale obviamente satisfaz ao axioma A.

Um teorema fundamental de Smale – o Teorema de Decomposição Espectral – diz que, quando f satisfaz o axioma A, há uma única decomposição finita de $\Omega = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_m$ em conjuntos fechados, disjuntos e invariantes Ω_i, os conjuntos básicos, em cada um dos quais, f é topologicamente transitivo, i.e., há uma órbita densa.

Outra consequência importante do axioma A é o fato de que para qualquer $x \in M$, podemos associar uma variedade estável $W^s(x)$ e uma variedade instável $W^v(x)$, definidas por

$$W^s(x) = \{y \in M | d(f^m(x), f^m(y)) \to 0 \; se \; m \to \infty\}$$

$$W^s(x) = \{y \in M | d(f^{-m}(x), f^{-m}(y)) \to 0 \; se \; m \to \infty\}$$

Estas são subvariedades injetivamente imersas [40,11]. Se para todo $x \in M$, $W^s(x)$ é transversal a $W^v(x)$, diz-se, então, que f satisfaz a condição de transversalidade forte. Ora, a solução do problema (i) começou com a conjectura de Palis-Smale [20] de que um difeomorfismo f é estruturalmente estável se e sómente se satisfaz ao axioma A e à condição de transversalidade forte.

Com o trabalho de J.Robin [34] e C.Robinson [35], no começo da década de 70, o problema ficou reduzido a provar que a estabilidade estrutural implica o axioma A, a chamada conjectura da estabilidade. Para uma M arbitrária, $r = 1$, esta conjectura foi provada por S.D.Liao [14] em 1980 e por Ricardo Mañé em 1982.

Mas o argumento de Mañé já continha o germe da sua notável prova da conjectura da estabilidade para uma dimensão arbitrária, $r = 1$, [18], que foi completada há alguns meses. Logo depois, Palis [21] demonstrou que o argumento de Mañé poderia ser adaptado para provar uma conjectura de Smale caracterizando difeomorfismos Ω-estáveis. Um difeomorfismo $f \in$Diff(M) é Ω-estável quando existir uma vizinhança U de tal f tal que sempre que $g \in U$ haverá, então, um homeomorfismo $h : \Omega(f) \to \Omega(g)$ com $gh = hf$.

Uma observação final sobre o problema (ii): desde que Smale provou que a estabilidade estrutural não é uma propriedade genérica, é natural perguntar sobre a genericidade da Ω-estabilidade e a genericidade do axioma A. Abraham-Smale [1] provaram que a

Ω-estabilidade não é genérica e S.Newhouse [19] provou que o axioma A também não é uma propriedade genérica.

Assim o espaço Diff(M^n), $n > 1$, é grande demais e parece não haver conjunto de Baire no seu interior que tenha características qualitativas simples de se descrever.

Com isto, termino a apresentação de alguns desenvolvimentos relativos ao Teorema.

A descrição dada acima sobre as origens deste Teorema e os desenvolvimentos a ele relacionados estaria incompleta e injusta sem uma referência especial a René Thom. Conheci-o através de Smale, quando este passava o primeiro semestre de 1960 no IMPA. Naquela época eu começava escrever o Teorema [25]. Em junho, Smale fez uma rápida viagem a Zürich para participar de uma conferência e falar sobre seu trabalho, sobre a conjectura de Poincaré em dimensão superior, que ele estava terminando.

Quando voltou, eu lhe disse que estava em dificuldades com o que hoje se chama "closing lemma". Ele respondeu que, na conferência, encontrara Thom que tivera a mesma dificuldade em dimensão n quando lidava com outro problema. Esta foi a origem de extensa correspondência que iniciei com Thom sobre este e outros assuntos. A finalização do Teorema em [25] - basicamente um corpo-a-corpo com o "closing lemma" - muito deve a Thom e foi completada enquanto ele passava um mês no IMPA em 1961.

Ele era editor da recém fundada revista "Topology" e pediu-me que o publicasse [25] lá.

Referências

[1] R.Abraham, S.Smale
Non genericity of Ω-stability
em [44], 5-8

[2] A.Andronov, L.Pontrjagin
Systèmes grossieres
Dokl. Akad. Nauk., SSSR, 14 (1937), 247-251

[3] D.Anosov
Stucturally stable systems
Proc.Steklov Inst. Math. 1986, vol 4, 61-95

[4] D.Anosov
Geodesic flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature
Proc. Steklov Inst. Math. 90 (1967), 1-235

[5] V.I.Arnold
Small denominators
Amer. Math. Soc. Transl (2) 456 (1965)

[6] G.D.Birkhoff
Collected works vol1,2
Amer. Soc. (1950)

[7] H De Baggis
Dynamical systems with stable structures
Ann. Math. Studies nr 29, vol 2, (1952), 37-59

[8] C. Gutierrez
Structural stability for flows on the torus with a cross-cap
Trans. Am. Soc. vol 241, 311-320

[9] C.Gutierrez
A counter example to a C^2 closing lemma
Ergod.Th & DYnam. Syst. vol 7 (1987), 509-530

[10] D.Hilbert
Über das Unendliche
Math Ann. 95 (1926), 161-190

[11] M.Hirsh, C.Pugh, M.Shub
Invariant manifolds
Springer lecture notes in Math., 538 (1977)

[12] H.Kneser
Kurvenscharen auf den Ringflächen
Math. Ann. 91 (1924, 133-154

[13] S.Lefschetz
Geometric differential equations recent, past and proximate future

Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems (Ed. Hal, La Salle), Puerto Rico, Academic Press, New York, 1967

[14] S.D. Liao
On the stability comjecture
Chinese Ann. Math. 1 (1980), 9-30

[15] M.A. Liapunov
Problèm général de la stabilité du mouvement
Princeton Univ. Press (1892)

[16] N. Markley
The Poincaré Bendixson theorem for the Klein bottle
Trans. Amer. Soc. 135 (1969), 159-165

[17] R.Mañé
An ergodic closing lemma
Ann. of Math. 116 (1982), 503-540

[18] R.Mañé
A proof of the C^1 stability conjecture
Publ.Mathematiques I.H.E.S. vol 66 (1988), 161-210

[19] S. Newhouse
Non-density of Axiom A(a) on S^2
em [44], 191-202

[20] J.Palis, S.Smale
Structural stbility theorems
em [44], 223-231

[21] J.Palis
On the C^1 Ω-stability conjecture
Publ.Mathematiques I.H.E.S. vol 66 (1988), 211-215

[22] M.M.Peixoto
On structural stability
Ann. of Math. 69 (1959), 199-222

[23] M.C.Peixoto, M.M Peixoto
Structural stability in the plane with enlarged boundary conditions
An. Acad. Brasil. Ci. 3 (1959), 135-160

[24] M.M Peixoto
Some examples on n-dimensional structural stability
Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 45 (1959) 633-636

[25] M.M.Peixoto
Structural stability on 2-dimensional manifolds
Topology 2, (1962), 101-121

[26] M.M.Peixoto
On bifurcations of Dynamical systems
Proc. Int. Cong. Math. vol 2, (1974), 315-319

[27] M.M.Peixoto
On the classification of flows on 2-manifolds
in [45], 389-419

[28] M.M.Peixoto
On an approximation theorem of Kupka and Smale
J. Diff. Eq. 3, (1967), 214-227

[28'] M.M.Peixotot , C.C.Pugh
Structurally stable systems on open manifolds are never dense
Ann. of Math. 88 (1968), 423-430

[29] V.A.Pliss
Nonlocal problems of the theory of oscilations
traduzido por Scripta Technica Inc., Academic Press, New York (1966)
Nas páginas 142-151 está reproduzido o artigo original de 1960

[30] H.Poincaré
Oevres vol. 1
Gauthier Villars, 1-220

[31] H.Poincaré
L'avenier des mathématiques
Int. Congr. of Math., Rome 1908. Proceedings vol 1, 167-182

[32] C.Pugh
The closing lemma
Amer. J. Math. 89 (1967), 956-1009

[33] C.Pugh
An improved closing lemma and a general density theorem
Amer. J. Math. 89 (1967), 1010-1021

[34] J.Robin
A structural stability theorem
Ann. of Math. 94, (1971), 447-493

[35] C.Robinson
C^r-structural stability implies Kupka-Smale
e, [45], 443-449

[36] S.Smale
The mathematics of time: essays on dynamical systems, economic processes, and related topics
Springer Verlag, (1980)

[37] S.Smale
Morse inequalities for a dynamical system
Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960), 43-49

[38] S.Smale
Structurally stable systems are not dense
Amer. K. Math. 88 (1966), 491-496

[39] S.Smale
Diffeomorphisms with many periodic points
Differential and Combinatorial Topology, Princeton Univ. Press, Princeton N.J., (1965), 63-80

[40] S.Smale
Differentiable dynamical systems

Bull. Amer. Math. Soc. 73, (1967), 747-817
reproduzido em [36] com anotações atualizadas até 1980

[41] S.Smale
Stability and genericity in dynamical sytems
Seminaire Bourbaki, 1969-1970, reproduzido em [36]

[42] J.Sotomayor
Generic one-parameter families on two-manifolds
I.H.E.S Publ. Math. nr 43, (1974)

[42′] R.Thom
Sur la partition en cellules associéeà une fonction sur une variété
C.R.Ac.Sc. Paris 228, (1949), 973-975

[43] R.F.Williams
The "DA" maps of Smale and structural stability
em [44], 329-334

[44] S.S.Chern, S.Smale (Ed.)
Global Analysis
Proc. Symp. Pure Mathe. 14, Am. Math. Soc., (1970)

[45] M.M.Peixoto (Ed.)
Dynamical systems
Proc. Symp. Salvador, Academic Press, (1973)