Problemas e Soluções

Matemática Universitária N. 8, Dezembro de 1988, 117 - 123.

Responsáveis: Derck Hacon e Laura Martignon

Comentários. Respondendo a vários leitores queremos comentar que estamos dispostos a publicar na Matemática Universitária problemas "abertos" (i.e., cujas soluções são desconhecidas pelas proponentes) assim como conjecturas, especificando em cada caso a situação correspondente.

Comunicamos também que ao recebermos duas ou mais soluções de um mesmo problema publicamos aquela cuja formulação é mais clara. Só publicamos duas (ou mais) soluções se as técnicas usadas são *essencialmente diferentes* e de interesse para o público.

Observamos que no n^o 7 da Matemática Universitária uma das duas perguntas feitas por Luiz Fernando Camargo, que enviou uma solução do problema n^o 10 foi publicada com erros. Em lugar de "Existe uma aplicação sobrejetiva $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ que leva retas em retas?" deve-se ler "Existe uma aplicação sobrejetiva $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ que leva retas em retas?"

Novos Problemas Propostos

Problema 19. Ache uma função polinomial que defina uma bijeção entre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$. (Proposto por Lenimar Nunes de Andrade, UFPB)

Problema 20. Sejam $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ onde para cada $i, 1 \leq i \leq n$, α_i e β_i são números reais estritamente positivos. Então:

$$(\tfrac{\alpha}{\beta})^\beta \leq (\tfrac{|\alpha|}{|\beta|})^{|\beta|}$$

onde $(\frac{\alpha}{\beta})^\beta := \prod_{i=1}^{n} (\frac{\alpha_i}{\beta_i})^{\beta_i}$, $|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$, e $|\beta| := \sum_{i=1}^{n} \beta_i$. Observe que se $\beta = (1, 1, \ldots, 1)$ ou $\beta = (1/n, 1/n, \ldots, 1/n)$ temos

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)^{1/n} \leq (\frac{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}{n})$$

(Proposto por Abdênago Alves de Barros, UFAL.)

Problema 21. Seja M um intervalo da reta real. Dadas duas sequências $(x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$ de pontos de M seja

$$\Delta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \sup |\sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \sum_{i=1}^{n} f(y_i)|$$

onde o supremo é tomado sobre todas as funções f Lipschitzianas definidas sobre M a valores complexos com constante de Lipschitz ≤ 1.

a) Prove que

$$\Delta((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)) = \min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_{\sigma(i)}|$$

onde S_n é o grupo de permutações de n símbolos.

b) Identifique a permutação σ para a qual o minimo é atingido.

c) Generalize a) e b) para o caso em que M é substituido pelo disco unitário.

d)O que dizer quando M é um espaço métrico abstrato?

(Proposto por Ruy Exel, IME-USP)

Problema 22. Seja E o espaço das funções continuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$ que se anulam na origem, com a norma do supremo. Considere o subconjunto K de E formado pelas funções Lipschitzianas com constante de Lipschitz ≤ 1. K é compacto e convexo.Determine seus pontos extremos. (Proposto por Ruy Exel, IME-USP.)

Problema 23 Seja C uma curva de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$ parametrizada pelo comprimento de arco s. Suponha que a curvatura $\kappa(s)$ de C satisfaça uma das desigualdades seguintes:

$$(1) \quad \kappa(s) \leq \frac{1}{s^\alpha} \quad (\alpha > 1)$$

$$(2) \quad \kappa(s) \leq \frac{1}{s^\alpha} \quad (\alpha > 2)$$

Prove que no caso (1), C tem uma direção assintótica e que no caso (2), C tem uma assíntota. (Proposto por Remi Langevin, Laboratoire de Topologie, Universidade de Dijon).

Problema 24. Prove que a soma

$$1+\binom{2}{1}+\ldots+\binom{6N-2}{3N-1}$$

de coeficientes binomiais $\binom{2k}{k}$ é divisível por $9N^2$ quando N é uma potência de 3. (Proposto por Nicholas Strauss PUC/RJ)

Soluções de Problemas Anteriores

Problema 14. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n, de funções reais continuas, invariante por translações, i.e., se $f \in V$ e $s \in \mathbb{R}$ então f_s, definida por $f_s(t) = f(t+s)$, também pertence a V. Mostre, que V é o espaço solução de uma equação diferencial ordinária com coeficientes constantes de ordem n. (A recíproca e óbviamente verdadeira). (Proposto por Maria Lucia Menezes PUC/RJ)

Solução (Luiz Fernando Camargo, IMECC-UNICAMP).

Seja $f_1, \ldots, f_n$ uma base de V. Para $s \in \mathbb{R}$ façamos $f_s = \begin{pmatrix} f_s^1 \\ \vdots \\ f_s^n \end{pmatrix}$ e $f = \begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}$. Podemos então escolher pontos $x_1, \ldots, x_n$em $\mathbb{R}$ tais que os vetores $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ formem uma base de $\mathbb{R}^n$. Assim, se $f_s = A(s)f$, é imediato que a aplicação $\mathbb{R} \ni s \mapsto A(s) \in GL(n, \mathbb{R})$ é contínua e que $A(s+t) = A(s)A(t)$ para todo $s, t \in \mathbb{R}$. Se $\rho > 0$ é tão pequeno que $||I - \rho^{-1} \int_0^\rho A(t)dt|| < 1$, resulta que

$\rho^{-1}\int_0^\rho$ é inversível e portanto $\int_0^\rho A(t)dt$ também. Então,

$$\begin{aligned} h^{-1}(A(h)-I)\int_0^\rho A(t)dt &= h^{-1}(\int_0^\rho (A(t+h)dt - \int_0^\rho A(t)dt) \\ &= h^{-1}(\int_\rho^{\rho+h} A(t)dt - \int_0^h A(t)dt) \end{aligned}$$

Fazendo-se $h \to 0$ obtemos $A'(0) = (A(\rho) - I))(\int_0^\rho A(t)dt)^{-1}$ e consequentemente $A'(s) = A(s)A'(0)$.
Segue-se então que $V \subseteq C^\infty$ e que a operação derivação é um endomorfismo de V. Logo, se $p(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ é o seu polinômio característico, V é o espaço-solução de equação $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$.

Outra solução foi enviada por Francisco Brito (UFPE).

Problema 17. Seja $f : I\!R \to I\!R$ uma função C^∞. Prove que f é um polinômio se e só se o desenvolvimento de Taylor de f em qualquer ponto $a \in I\!R$ é um polinômio. (Proposto por Wojciek Kucharz, State University, Albuquerque, New Mexico)

Solução (Jorge Hounie, Dept. de Matemática, UFPE) Dado $x \in I\!R$, consideremos o menor inteiro $n(x)$ tal que $D^jf(x) = 0$ se $j > n(x)$. Acrescentando a f uma constante conveniente podemos supor sem perda de generalidade que f não se anula identicamente em nenhum intervalo aberto de $I\!R$, isto é, se $n(x)$ for constante em algum intervalo aberto, será um inteiro não negativo.

Resultado Básico *Se I é um intervalo fechado próprio, então I contém um intervalo aberto $(a,b) \neq \emptyset$ onde $n(x)$ é constante.*

Com efeito, os conjuntos $F_n = \{x \in I : D^jf(x) = 0, j > n\}$ são fechados e sua reunião é $I\!R$, pelo Teorema de Baire, um deles deve conter um intervalo (a,b) e f coincide com um polinômio em (a,b).

Suponhamos por absurdo que exista um intervalo fechado I_0 tal que f não coincida com nenhum polinômio em I_0. Pelo resultado básico, $n(x) = n_0$ em algum subintervalo de I_0. Seja U_0 a reunião de todos os abertos relativos de I_0 onde $n(x) \equiv n_0$.

Por hipótese, $\bar{U}_0 \neq I_0$. Seja (a_0, b_0) uma componente conexa de U_0. Então $D^{n_0} f(x)$ é uma constante não nula em (a_0, b_0) e podemos supor, por exemplo, que a_0 está no interior de I_0. Por continuidade $|D^{n_0} f(x)| > 0$ num intervalo fechado $J_0 = [\alpha_0, \beta_0] \subset I_0$ com $\alpha_0 < a_0$ e $\beta_0 \geq b_0$. Observe que $(\alpha_0, a_0] \cap \bar{U}_0 \neq (\alpha_0, a_0]$ Com efeito, a igualidade implicaria que $n(x) = n_0$ em (α_0, b_0) contrariando o fato de que (a_0, b_0) seja uma componete conexa de U_0.

Podemos encontrar um intervalo fechado $I_1 \subset [\alpha_0, a_0)$ disjunto de $\bar{U}_0$ que, pelo resultado básico, contem um aberto maximal U_1 onde $n(x) = n_1$. Como $I_1 \cap \bar{U}_0 = \emptyset$ segue que $n_1 \neq n_0$. Aumentando I_1, se for preciso, podemos supor que $\bar{U}_1 \neq I_1$. Raciocinando como antes, podemos encontrar $J_1 \subset I_1$ onde $|D^{n_1} f(x)| > 0$ e J_1 contem I_2, disjunto de U_1, que pelo resultado básico ...

Continuando com este procedimento, podemos construir uma sequência de intervalos encaixados $J_0 \supset J_1 \supset \cdots$ e uma sequência de inteiros positivos (n_j) tais que

$$|D^{n_j} f(x)| > 0 \quad se\ x \in J_i \quad e \quad n_j \neq n_k \quad se\ j \neq k$$

Na interseção dos J_i infinitas derivadas de f não se anulam, uma contradição.

Outras soluções foram enviadas por Ruy Exel (IME-USP) e Jorge Oswaldo Gomez Aarão (IMPA)

Problema 18. Considere a equação

$$x^2 + 1 = 2 \cdot 5^a$$

a)Ache, por métodos elementares, todos os pares (x, a), tais que $a \in \mathbb{N}$ e x é potência de um número primo, que satisfazem a euqação.

b) Ache todos os pares (x, α), tais que $a \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{Z}$ que satisfazem a equação.
(Proposto por Christoph Hering, Math. Institut, Univ. Tübingen)

Primeira Solução (Nick Strauss, PUC/RJ)
Fatorando a equação nos inteiros gaussianos $\mathbb{Z}[i]$ temos

$$(x - i)(x + i) \;=\; (1 + i)(1 - i)(2 + i)^a (2 - i)^a.$$

Então $x + i = i^b(1+i)(2 \pm i)^a$ $(0 \leq b \leq 3)$ Escrevendo $(2+i)^a = R_a + iS_a$ temos $R_a + S_a = \pm 1$ ou $R_a - S_a = \pm 1$. A primeira equação é impossível (se $a > 0$) pois $R_a + S_a$ é 3 módulo 10 se a é impar e 7 módulo 10 se a é par. Então precisamos resolver a equa ção

$$(1+i)(2+i)^a + (1-i)(2-i)^a = \pm 2$$

Nos inteiros p-adicos $\mathbb{Z}_p$ (p=39)$\sqrt{-1}$ existe e $\sqrt{-1} \equiv 1252$ módulo p^2. A equação em $\mathbb{Z}_p$ é

$$1253(1254)^a + (-1251)(-1250)^a = \pm 2 \text{ módulo } p^2$$

Seja $a = (p-1)u + v$, $0 \leq v < p-1$. Então$(1254)^a = (1+29p)^u(1254)^v$ módulo p^2 e $(-1250)^a = (1+35p)(-1250)^v$ módulo p^2. Módulo 37, a equação tem soluções para $v = 0, 1, 2$.

Usando a expansão binomial, obtemos uma série de potências em u. O coeficiente de u é não-nulo nos tres casos módulo 37^2.

v	0	1	2
coeficiente módulo 37^p	26p	24p	3p

Aplicamos agora o *Teorema de Strassmann*

> "Seja $f(x) = \sum_{i \geq 0} a_i x^i$ uma série com coeficientes em $\mathbb{Z}_p$ que converge na métrica p-ádica ou seja $v_p(a_i) \to \infty$ onde $v_p(x) = max\{k | p^k \text{ divide } x\}$. Se $f(x)$ não é identicamente nulo então o número de zeros de $f(x)$ em $\mathbb{Z}_p$ é menor ou igual a max$\{i$ tal que $v_p(a_i)$ é mínimo$\}$."

Aplicando o Teorema aos casos $v = 0, 1, 2$ obtemos em cada caso no máximo uma solução. Como $a = 0, 1, 2$ são soluções da equação $x^2 + 1 = 2 \cdot 5^a$, estas são os únicas soluções.

Segunda Solução (do proponente, Christoph Hering, Univ. Tübingen)

Resolver a equação $x^2 + 1 = 2 \cdot 5^a$ é o mesmo que resolver $x^2 + 1 = 2y^2$ ou $x^2 = 10y^2$ onde y uma potência de 5.Para $y = 1$ ou 5 as

soluções são 1,3,7. Seja agora $y \geq 25$. Para $x^2+1 = 2y^2$ as soluções (positivos são] $y = 1, 5, 29, \ldots$, onde $y_0 = 1$ e $y_{n+2} + y_n = 6y_{n+1}$. Módulo 25 esta sequência é
1, 5, 4, 19, 10, 16, 11, 0, -11, -16, -10, ...
Ela tem periodo 30 e $y_n = 0 \bmod 25$ para $n \equiv 0 \bmod 15$. Módulo 31, a sequência é
1, 5, -2, 14, -7, 6, 12, 4, 12, 6, ...
com periodo 15. As potências de 5 mod 31 são 1, 5, 25 e então $n \equiv 0, 1, 13, 14$ módulo 15. Então nãotem solução $y \geq 25$ neste caso. Para a equação $x^2 + 1 = 10y^2$ as soluções positivos são $y = 1, 37, \ldots$ onde $y_{n+2} + y_n = 38y_{n+1}$, Calculando módulo 5 temos que $n \equiv 2$ módulo 5 e calculando módulo 31 temos que $n \equiv 0, 14$ módulo 15. Então neste caso também não tem solução $y \geq 25$.

Este problema surgiu em conexão com representações de certos grupos. É um caso especial do seguinte problema:

> " Ache todas as soluções das equações
>
> $$\Phi_n(x) = (n+1)^\alpha (2n+1)^\beta$$
> $$e \;\; \Phi_n(x) = p(n+1)^\alpha (2n+1)^\beta$$
>
> onde $\Phi_n(x)$ é o n-esimo polinômio ciclotómico $\prod_\alpha (x - a)$ (α percorre as n-esimas raizes primitivas de 1) e p é o maior número primo que divide n"

Se n=4 as equações são $x^2 + 1 = 5^\alpha 9^\beta$ e $x^2 + 1 - 2 \cdot 5^\alpha 9^\beta$ módulo 3. Mas $x^2 + 1 \neq 0$ módulo 3 Então as equações são $x^2 + 1 = 2 \cdot 5^\alpha$ (já resolvido) e $x^2 + 1 = 5^\alpha$ que pode ser resolvido usando o mesmo método. O caso n=6 entretanto é aberto. As equações neste caso são

$$x^2 - x + 1 = 7^\alpha 13^\beta \;\; e \;\; x^2 - x - 1 = 3 \cdot 7^\alpha 13^\beta.$$