Resenhas de Livros

Matemática Universitária N. 8, Dezembro de 1988, 125 - 131.

Responsável: Elon Lages Lima

Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução

por Rafael Iório e Valéria de Magalhâes Iório
Projeto Euclides, IMPA

David Goldstein Costa
Departamento de Matemática –UnB
70919 Brasília DF

Nao seria exagero dizer que o estudo das equações diferenciais (ordinarias e parciais) tem tido nos últimos anos, no Brasil, uma tendência crescente naqueles centros que se preocupam e estão envolvidos com o ensino e a pesquisa na area de análise. Não procuraremos explicar aqui o porque dessa *tendência* ...

O livro *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, de Rafael Iório e Valeria Iório, como os próprios autores mencionam, é o resultado de notas de aulas e de varios cursos ministrados no Brasil nos últimos nove anos. Inicialmente, e sem a pretensão de fazer um apanhado histórico do desenvolvimento das equações diferenciais em nosso país, não posso deixar de lembrar da situação há cerca de quinze anos atrás. Na época havia no máximo uma meia dúzia de pesquisadores na área de Equações Diferenciais Parciais (EDP's) e, via de regra, os cursos de pós-graduação ministrados na área eram baseados no Fritz John [1,2] e no excelente clássico enciclopédico *Methods of Mathematical Physics, vols. 1 e 2* de Courant-Hilbert [3]. Evidentemente, muitos outros livros estrangeiros e alguns poucos livros brasileiros surgiram desde então, vários deles utilizando a linguagem e o rigor modernos da Análise (como a linguagem dos espaços de funções e operadores, das derivadas fracas, das questões de regularização de funções, etc. ,etc. só para citar alguns exemplos). Nessa classe e no estrangeiro poderíamos citar o livro introdutório de Folland [4] e a coleção com quatro volumes *Methods of Modern Mathematical Physics* de Reed-Simon [5], o análogo moderno de Courant-Hilbert. Aqui no

Brasil, gostaria de citar o livro introdutório de de Figueiredo [6] e, agora, o livro que é objeto da presente resenha.

O conteúdo dos cinco primeiros capítulos forma o núcleo para um bom curso introdutório de EDP's a nível de pós- graduação (ou final de graduação, para os mais ambiciosos). Em muitos aspectos, essa primeira parte do livro dos Iórios e o livro acima mencionado de de Figueiredo são complementares um do outro. Os objetivos principais são o de motivar o aparecimento das séries de Fourier e da transformada de Fourier através do método de separação de variáveis, fazer um estudo teórico da Análise de Fourier e aplicar essa teoria na resolução de problemas clàssicos de EDP's com condições de contorno e/ou valor inicial em certos domínios (limitados ou não) com simetria, sendo a ênfase dada para o caso de uma dimensão espacial. A segunda parte do livro é constituida dos capitulos VI a IX e engloba material para um segundo curso de EDP's a nível de pós-graduação. Aqui, o objetivo final (que é um dos objetivos principais do texto) é resolver o chamado *Problema de Dirichlet Classico*:

Dados um domínio limitado $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ com fronteira de classe C^2 e uma função $g \in C(\partial\Omega)$, encontrar $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\Delta u = 0 \ em \ \Omega \ , \ u = g \ em \ \ \partial\Omega.$$

O método escolhido para resolver o Problema de Dirichlet é o das *equações integrais*, o que está bem no espirito *analítico-funcional* do livro e reflete o gosto pessoal dos autores. Ao longo do processo são desenvolvidos os pre-requisitos de Análise Funcional (Cap. VI) e é feito um estudo detalhado e necessário, nessa abordagem, do *Problema de Autovalores* para o Laplaciano com condições de contorno de Dirichlet.

Já desde o início, revela-se uma das características claras do livro: *aguçar a curiosidade do leitor e estimulá-lo a consultar a bibliografia*; esse estímulo é por vezes indireto, através de frases incisivas mas não elucidativas tais como ...*Para colocar então uma equação parabólica na forma (2.15) è preciso que a equação seja parabólica em uma vizinhança do ponto de interesse. O caso elítico é bem mais delicado([28]).* (Cf. Capítulo I.2, Classificação em Tipos, pg. 9). Outra característica marcante é a de que os exercícios são, definitivamente, parte integrante do texto! O leitor é incentivado a e deve fazer os exercícios indicados no texto, sob pena de, em algumas partes, não vir a entender o assunto que está sendo tratado!

A seguir, destacamos alguns aspectos sobre os quais gostaríamos de comentar.

1) Desde o início do Cap. I, os autores chamam a atenção para o fato de que podem existir várias noções de *solução* e, de começo, consideram o caso de *soluções clássicas*. Essa atitude é evidenciada sistemàticamente na maneira como os Problemas são escritos, incluindo-se a *classe de regularidade* juntamente com as *condições iniciais e de contorno.*

2) No Cap. II os autores consideram, como é de costume, um exemplo para motivar o aparecimento das séries de Fourier através do método de separação de variáveis. Ao fazê-lo com um problema de condução de calor numa barra e ao obter o *candidato* à solução do problema, os autores já destacam nesse estágio preliminar um fato extremamente importante:

A solução (formal) $u(x,t)$ pode ser *representada* através de um *operador integral* com *núcleo* $K(x,y,t)$,

$$u(x,t) = [T(t)f](x) = \int_0^l K(x,y,t)f(y)\,dy;$$

(No caso em questão, $T(t)$ é um *semigrupo de contrações* em L^2, isto é, $\| u(\cdot,t) \| \leq \| f \|$, $t \in (0,\infty)$)

3) Já desde o Cap. III, que trata do estudo das séries de Fourier, chama-se a atenção para as semelhanças que existirão entre as teorias das *Séries de Fourier* e das *Integrais de Fourier*, mencionando-se que elas são dois exemplos importantes da *Análise Harmônica* em grupos abelianos localmente compactos.

4) Nos dois últimos capítulos da primeira parte as semelhanças referidas acima são enfatizadas, sendo intencional o uso da mesma

notação! Aqui, vale mencionar que, embora os autores introduzam formalmente as topologias dos *espaços bases* $X = \mathbf{P}$ e $X = \mathbf{S}$, é interessante e acertada a escolha feita em definir as *distribuições periódicas* e as *distribuições temperadas* como *limites pontuais* (i.e., no sentido da topologia fraca do dual X') de sequências de elementos dos espaços bases correspondentes. Então, eles mostram que os elementos $T : X \to \mathbf{C}$ de X' são, de fato, funcionais lineares *contínuos*. Essa inversão na apresentação é mais natural e desejável quando se está vendo distribuições pela primeira vez. Em particular, os espaços $L^2([-\pi, \pi])$ e $L^2(\mathbf{R})$ são introduzidos sem utilizar o conceito da *medida de Lebesgue*.

5) O Capítulo VI, juntamente com os exercícios, é um *Minicurso* de Análise Funcional, o qual, como é intenção dos autores, torna o livro razoavelmente auto-suficiente. O objetivo final desse capítulo é chegar à *Alternativa de Fredholm para Operadores Compactos* e ao *Teorema Espectral para Operadores Compactos Auto-Adjuntos*, que serão utilizados nos capítulos seguintes.

6) Na abordagem que é considerada do *Problema de Dirichlet*, o estudo necessário do correspondente *Problema de Autovalores* é feito no Cap. VII. O caso do problema de autovalores para o Laplaciano com condições de contorno de Dirichlet em um aberto conexo Ω do $\mathbb{R}^3$ é estudado de maneira bastante detalhada. A escolha da dimensão $n = 3$ é particularmente acertada! Ela evita as tecnicalidades inerentes ao caso $n > 3$ e, por outro lado, é suficientemente geral para fornecer a maior parte das propriedades importantes do operador integral K_G associado à *Função de Green*.

7) Um dos objetivos principais do texto, a resolução final do Problema de Dirichlet é feita no Capit ulo VIII, após os elementos desenvolvidos nos Capítulos VI e VII. Aqui, os autores sacrificam certas demonstrações técnicas, substituindo-as por argumentos intuitivos, em favor de uma maior transparência das idéias básicas envolvidas. Considerando que uma das tônicas do livro é o seu rigor matemático, essa atitude é das mais saudáveis, como con-

traste!

8) Novamente, não se pode deixar de notar o papel fundamental dos exercícios como parte integrante do texto! Assim é que a solução do *Problema de Dirichlet numa Bola*, que é um tópico matural num livro como o presente, aparece como o Exercício 1 do Capitulo VIII.

9) De uma maneira geral, os objetivos são claramente delimitados pelos autores e o leitor mais curioso está sempre sendo induzido a consultar a bibliografia quando desejar estudar um determinado tópico que foge aos objetivos do texto e que não é portanto abordado (p. e. , o estudo das equações de primeira ordem), ou quando desejar se deter mais demoradamente em algum tópico que é abordado, mas cujo estudo mais detalhado fugiria novamente aos objetivos do texto. Como exemplo dessa última situação, citamos a seção 2 do Cap. II onde o leitor é alertado para o fato de que o *método de separação de variáveis* pode conduzir a outros problemas de contorno mais gerais para equações ordinárias de segunda ordem, os chamados *Problemas de Sturm-Liouville.*

10) Finalmente, como não poderia deixar de acontecer, o livro apresenta algumas pequenas falhas. O uso eventual de uma figura para elucidar o texto (que por sinal é feito pelos autores de maneira bastante equilibrada) não acontece no exemplo do problema de Cauchy para a equação da onda a uma dimensão espacial (pg. 14), onde o *intervalo de dependencia* é $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ e as *características passando por* (x_0, t_0) mereciam uma figura. Por outro lado, há uma certa *abundância* de propriedades sobre as distribuições temperadas que são enunciadas e demonstradas no texto do Cap. V: ao nosso ver, algumas dessas propriedades poderiam ser transferidas para a lista de exercícios. Por fim, não passam desapercebidos vários erros tipográficos que certamente serão corrigidos numa próxima edição.

Em contraposição ao que dizem os autores em seu prefácio, não consideramos como defeito a omissão parcial (ou total) de certos tópicos. É natural que qualquer seleção de tópicos reflita o gosto pessoal dos autores e omita outros tópicos! O importante, ao nosso ver, é que essa seleção forme um *conjunto harmônico* dentro do que se propõem os autores (no caso, um curso introdutório às EDP's) e consiga transmitir uma *mensagem* com objetivos claros e definidos. E isso é feito sobremaneira no presente caso, através de um estilo fluente e agradável!

Para finalizar, cabe mencionar que, dentro da área de Análise, existem hoje em nosso país vários grupos de pesquisa atuantes em EDP's e que, em geral, estão ligados às duas grandes sub-áreas: (i)Equações Elípticas [Não-lineares]; (ii)Equações de Evolução. Com a sua linguagem moderna e objetiva, o livro dos Iórios vem ajudar a preparar o nosso estudante de pós-graduação a ingressar de maneira firme em uma dessas sub-áreas, constituindo-se em excelente texto para pelo menos dois cursos semestrais a nível de pós-graduação. É certamente uma contribuição que já se fazia necessária à literatura brasileira na área de EDP's!!

Referências

[1] F. John
Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations
Interscience Publishers, (1955).

[2] F. John
Partial Differential Equations
Springer-Verlag, (1971).

[3] R. Courant, D. Hilbert
Mathematical Methods of Physics, vols. 1 e 2
Interscience Publishers, (1953/62).

[4] G.B. Folland
Introduction to Partial Differential Equations

Princeton University Press, (1976).

[5] M. Reed, B. Simon
Methods of Modern Mathematical Physics, vols. 1 a 4
Academic Press, (1972/75/78/79).

[6] D.G. de Figueiredo
Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais
Projeto Euclides, CNPq, (1977).