

Sistemas Caóticos ou Turbulentos

Atratores e Bifurcações Homoclínicas*

Jacob Palis

IMPA
Estrada Dona Castorina, 110
22460 Rio de Janeiro

Dedicado a Elon Lages Lima, por ocasião de seus 60 anos

0. Introdução.

Recentemente, nos últimos quinze anos, têm sido foco de enorme atenção as aplicações de sistemas dinâmicos (endomorfismos, difeomorfismos, campos vetoriais-fluxos) como modelos matemáticos para fenômenos de difícil compreensão da Física (turbulência de fluídos, previsão do tempo, transição de fases, fenômenos óticos, Mecânica Quântica,...), Engenharia (fraturas em materiais,...), Biologia (competição de espécies,...), Química (reações químicas,...) e outras Ciências. O que dá *legitimidade* a pelo menos parte destas aplicações e, certamente, à ousadia do enfoque de questões quase que intocadas anteriormente ou mal interpretadas ("ruído" como sinônimo de comportamento complicado) é sua potencialidade de *comprovação experimental* grandemente auxiliada pelo progresso de técnicas computacionais e de experimentos em laboratório. Também é importante ressaltar o efeito

*Esta exposição baseou-se em palestras proferidas no Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo e nas Universidades Federais de Pernambuco e Minas Gerais em Novembro de 1989 e, pouco antes, nas Universidades Federal do Ceará, Helsinque, Lund, Paris e Institut des Hautes Études Scientifiques.

inverso: a surpreendente abundância de aspectos “turbulentos” ou “caóticos” em grande parte dos modelos, ajudou, malgrado a pouca ou nenhuma criatividade de boa parte das centenas de artigos publicados, a formar o “pensamento” dinâmico de nossos dias. Novos e significativos teoremas têm sido obtidos, levando-nos a uma compreensão crescente de aspectos estruturais e mecanismos que deslancham o comportamento caótico dos sistemas.

Esta e outras faces de interação com variadas áreas do conhecimento e uma correlata tendência de unidade interna, espelham a singular relevância da Matemática permeando o conhecimento científico e sendo, com freqüência, instrumento crítico de seus novos rumos. O seu papel é tão visível hoje no desabrochar de novas teorias em outras áreas, quanto o foi para Einstein décadas atrás quando declarou: o Grande Arquiteto só pode mesmo ser um matemático...

A teoria dos Sistemas Dinâmicos como a entendemos hoje iniciou-se com os trabalhos de Poincaré (o criador de outras tantas teorias matemáticas) há cerca de cem anos, seguindo-se os trabalhos de Lyapunov e Birkhoff (anteriormente Newton?). Tem como objetivo central o estudo qualitativo, e freqüentemente de caráter bastante geométrico, das equações diferenciais (campos de vetores-fluxos) e das transformações diferenciáveis de um espaço em si mesmo (endomorfismos, difeomorfismos quando têm inversa): pode-se pensar em termos de um processo iterativo em que se busca descrever o que acontece quando o aplicamos (muitas vezes...) a um ponto inicial. Assim, procura-se saber qual o *comportamento assintótico* das órbitas (trajetórias) de um campo de vetores ou de uma transformação. Quanto ao espaço ambiente, suporemos aqui que ele tem dimensão finita: é uma parte limitada do espaço euclidiano \mathbf{R}^n ou uma superfície de dimensão qualquer. As trajetórias positivas (tempo positivo, iterados positivos) de um sistema dinâmico tendem, em sua maioria, para *atratores*: subconjuntos que atraem as trajetórias de um conjunto de medida (área, volume,...) positiva de pontos do espaço ambiente. Descrever a natureza (topológica, dinâmica) dos atratores, para diferentes sistemas dinâmicos, é objeto central da teoria. Às vezes eles são bem simples, como um ponto (ponto fixo, singularidade ou zero ou ponto de repouso) ou uma curva simples fechada (órbita periódica) ou uma subsuperfície (subvariedade) do espaço ambiente ou até

mesmo um *objeto de dimensão fracionária (fractal)*. Este conceito de dimensão fracionária, introduzido por Hausdorff no princípio do século e bastante divulgado hoje em dia, joga um papel importante em Dinâmica que será comentado na seção 4. Como veremos na discussão do trabalho de Ruelle-Takens, o *atrator* será chamado de *estranho* se gozar da propriedade de ser sensível às condições iniciais: órbitas que começam bem juntas umas das outras podem se separar bastante ao aproximar-se do atrator. No nosso entender, para evitar casos patológicos desinteressantes, o atrator deve ter também uma certa robustez ou persistência em relação a perturbações (pequenas modificações) do sistema: após muitas das pequenas modificações que podemos fazer do sistema inicial, continuam existindo atratores que são sensíveis às condições iniciais. "Muitas" aqui pode significar todas ou maioria no sentido topológico (categoria de Baire) ou no sentido de uma percentagem probabilística. Em resumo: *um atrator é dito estranho* se for sensível às condições iniciais e robusto em relação a perturbações do sistema dinâmico inicial. Os atratores com estrutura que denominaremos *hiperbólica* (o leitor pode ir à seção 2 se já estiver ansioso para ver o significado deste conceito) gozam dessa propriedade de robustez e também são sensíveis às condições iniciais desde que não contenham órbitas periódicas atratoras. Discutiremos bastante a existência de atratores estranhos não hiperbólicos e de como, na verdade, eles parecem ser muito comuns em Dinâmica.

O propósito deste artigo é o de relatar, de maneira tão suave quanto nos é possível mas ainda assim sem abrir mão do conteúdo matemático, quatro trabalhos que influenciaram de forma marcante a teoria dos Sistemas Dinâmicos nos últimos tempos. Seus autores, Ruelle-Takens, Feigenbaum e Couillet-Tresser, Lorenz e Hénon, são, com exceção de Takens*, físicos-matemáticos, meteorologista-matemático e astrônomo-matemático que visavam às aplicações em outras áreas da Ciência. *Estes fatos falam por si só, e uma vez mais, sobre a integridade da Matemática*. Após a divulgação destes trabalhos, *teoremas matemáticos*, vários dos quais serão mencionados no texto, têm dado consistência ao que chamamos de dinâmica caótica ou turbulenta. Em sua base estão a teoria hiperbólica essencialmente construída

*Takens é um matemático-matemático.

nos anos sessenta, e por nós brevemente apresentada na seção 2, e a teoria ergódica diferenciável ainda em progresso. Mais recentemente, e através de resultados que relacionamos na última seção, parece emergir certo caráter estrutural para os “sistemas caóticos” através do que se denomina bifurcações homoclínicas. Pelo menos em dimensões baixas do espaço ambiente, nossa proposta indica um cenário que abrange as *bifurcações, i.e. sensíveis alterações da dinâmica quando se modifica o sistema*, indicadas ou sugeridas nos trabalhos acima para transformações associadas aos “regimes caóticos”.

Dado o escopo necessariamente limitado de nossa exposição, é evidente que um bom número de contribuições que de uma forma ou de outra são relevantes à dinâmica turbulenta não são aqui mencionados. Por exemplo, dos trabalhos da escola soviética, de Kolmogorov, Arnold, Sinai, Oseledec, Katok, Silnikov, Sarkoviskii, ..., só citamos uma idéia de Landau e um resultado de Jacobson; quanto à dinâmica hiperbólica, brevemente descrita na seção 2, citamos Andronov-Pontryagin e Anosov. Salientamos, por fim, que nos restringimos à dinâmica real, especialmente campos de vetores e difeomorfismos dissipativos (ou dissipativos em certas regiões), sem discutir, portanto, dinâmica complexa ou holomorfa e dinâmica conservativa.

1. Os trabalhos de Ruelle-Takens, Lorenz e Hénon.

Um dos primeiros trabalhos, que data do início dos anos setenta, e talvez o mais provocativo desta nova etapa de desenvolvimento de Sistemas Dinâmicos, foi o de Ruelle-Takens sobre a natureza da turbulência de fluídos, ligando-a à presença do que denominaram *atratores estranhos*, um dos tópicos principais do presente artigo. Anteriormente a este trabalho o famoso físico soviético Landau havia proposto, como explicação para o aparecimento da turbulência, a formação de muitos movimentos quasi-periódicos: toros (de dimensão digamos n) atratores, invariantes pelo fluxo, nos quais este vem dado por

$$f_t x = \phi(\alpha_1 t, \dots, \alpha_n t)$$

onde ϕ é periódica de período 1 separadamente nas suas n variáveis e as *freqüências* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ são incomensuráveis (racionalmente independentes): se $a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n = 0$ para números inteiros a_i ,

então $a_i = 0$ para todo i (veja refs. [1], [2]). E. Hopf fez, no final dos anos quarenta, uma proposta semelhante, conjecturando que a transição para a turbulência está ligada à formação, por sucessivas bifurcações, de subvariedades atratoras de dimensões crescentes e apresentando como exemplo ainda a situação quasi-periódica: fluxos irracionais em toros como acima formando-se a partir de outros com menor número de freqüências independentes. Fundamentalmente, a proposta de Ruelle-Takens sobre atratores estranhos apontava a associação de turbulência com a incerteza de previsões a longo prazo quanto à evolução do sistema. Esta incerteza, que mencionaremos outra vez no caso do atrator de Lorenz, um pouco mais adiante, é denominada *sensibilidade em relação às condições iniciais*: com boa probabilidade, duas órbitas que no futuro aproximam-se do atrator tendem a se separar bastante com o tempo, mesmo quando iniciam-se muito próximas uma da outra. Desta forma eles rejeitaram o *dogma* da quasi-periodicidade como explicação para o início da turbulência, já que tal sensibilidade com as condições iniciais não ocorre no modelo de Landau e Hopf. Assim, nesta proposta o comportamento turbulento não está necessariamente associado à existência de atratores de dimensão muito alta e pode ocorrer um espectro contínuo de freqüências, ainda ao contrário do que acontece no modelo quasi-periódico (veja a ref. [3]). Além do mais, um fluxo irracional no toro de dimensão $n \geq 3$ pode ser aproximado por outro fluxo exibindo um *atrator estranho hiperbólico* (veja a seção 2).

Apesar da notável contribuição de Ruelle-Takens que influenciou o pensamento dinâmico da última década e meia com seus atratores estranhos, em nossa opinião há aqui uma certa ironia: o que eles tinham em mente em seu trabalho eram atratores hiperbólicos não-triviais (lembramos que o conceito de hiperbolicidade será discutido na seção 2), e tais atratores parecem tão raros em modelos de fenômenos complicados de outras áreas como os fluxos quasi-periódicos rejeitados como protótipo do início de turbulência. O que tem sido detectado em variados exemplos são os atratores estranhos do tipo Hénon, que constituem o terceiro tópico de nossa discussão: eles não são hiperbólicos mas exibem bons graus de sensibilidade em relação às condições iniciais e de robustez ou persistência em relação a perturbações do sistema inicial. O que proporemos mais tarde é um cenário matemático mais

abrangente, o de bifurcações homoclínicas, que engloba este e outros celebrados fenômenos (cascatas de duplicação de períodos, infinidade simultânea de poços ou atratores periódicos) que também iremos discutir mais adiante.

Um ponto importante em nossos comentários até aqui é a ausência de singularidades (zeros ou pontos de repouso) dos campos de vetores no que concerne a atratores que possam servir de modelo para o início do movimento turbulento ou caótico de um fluido. Tal não é o caso no seguinte exemplo que passamos a apresentar. Ele corresponde ao importante trabalho do meteorologista-matemático E. Lorenz, que em 1963 propôs o que hoje chamamos de *atrator de Lorenz* como modelo de turbulência na previsão do tempo. Aparentemente muitos matemáticos e físicos só tomaram conhecimento deste trabalho nos anos setenta: trata-se de um experimento computacional com uma família de campos vetoriais polinomiais quadráticos no espaço \mathbf{R}^3 , o qual resulta de um truncamento no desenvolvimento em série da conhecida equação de Navier-Stokes que governa o movimento dos fluidos. O campo de vetores considerado por Lorenz tem por equações

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -10x + 10y \\ \dot{y} &= 28x - y - xz \\ \dot{z} &= -\frac{8}{3}z + xy.\end{aligned}$$

Inicialmente, Lorenz observou que em uma região limitada de \mathbf{R}^3 existe um *atrator*, conjunto que atrai as trajetórias positivas do campo que se iniciam em pontos próximos a ele. A novidade é que o *atrator contém a origem do sistema de coordenadas, onde o campo se anula (singularidade), como também órbitas periódicas (uma infinidade delas)*. Ademais, o atrator é *persistente ou robusto*, no sentido de que pequenas perturbações do campo levam à “existência” de um atrator próximo com a mesma característica de conter simultaneamente uma singularidade e uma infinidade de órbitas periódicas. A figura indica a projeção do atrator de Lorenz no plano xz .

Também do ponto de vista das aplicações, sua motivação inicial, o modelo de Lorenz é relevante: ele o utilizou para argumentar pela *impossibilidade* de se fazer previsão do tempo a longo

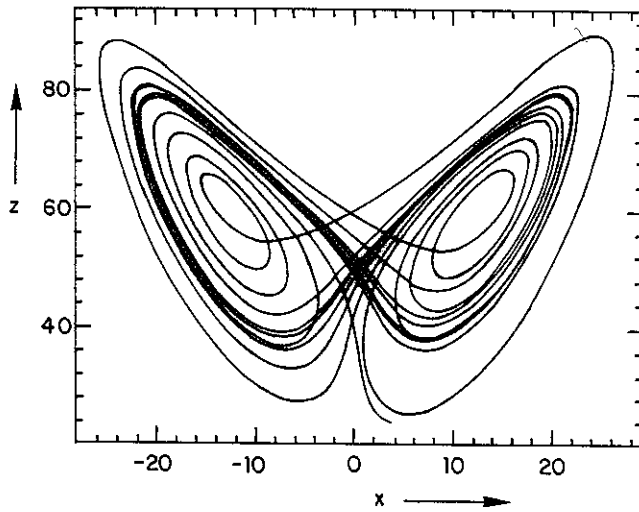


Figura 1. Atrator de Lorenz

prazo, baseando-se na propriedade de *sensibilidade* das soluções do campo acima *em relação às condições iniciais*. Isto quer dizer que existe $\rho > 0$, tal que para a *maioria* dos pares de pontos na *bacia do atrator* suas órbitas positivas separam-se a uma distância de pelo menos o número ρ : esta separação de órbitas, inclusive daquelas que inicialmente estão próximas uma da outra, ocorre com probabilidade um para pares de pontos no produto da bacia do atrator por si mesma. Por bacia do atrator entendemos o conjunto de pontos de \mathbf{R}^3 cujas órbitas positivas tendem ao atrator, i.e. os pontos cujo ω -limite está contido no atrator. Neste caso, a bacia do atrator é um aberto de \mathbf{R}^3 .

Agora uma curiosidade: será que já foi provado matematicamente que o campo vetorial que serviu de base ao experimento computacional de Lorenz exibe um atrator com as propriedades acima? Por exemplo, com a propriedade de sensibilidade em relação às condições iniciais, que o levou à famosa conclusão sobre a imprevisibilidade do tempo a longo prazo? Mais ainda com persistência ou robustez do atrator em relação a pequenas perturbações do campo (para obstar o fato de que as equações diferenciais escritas por Lorenz têm caráter aproximativo – truncamento de um desenvolvimento em série)? A resposta é que a

comprovação rigorosa destas questões revelou-se bastante difícil e não foi feita até o momento, embora se espere que isto venha a ocorrer a qualquer momento... . O problema permanece em aberto mesmo quando se admite variar os coeficientes das equações de Lorenz ou, mais geralmente, para equações diferenciais quadráticas. Entretanto, há outros campos vetoriais que exibem matematicamente atratores com as propriedades que Lorenz propôs para o seu (Guckenheimer-Williams). Recentemente, Rychlick e Robinson exibiram atratores tipo Lorenz para equações diferenciais cúbicas. O fato é que, independente de previsão do tempo, os atratores tipo Lorenz têm hoje papel de relevo na teoria dos Sistemas Dinâmicos.

Dois outros trabalhos baseados em experimentos computacionais, e exibindo também admirável intuição e criatividade, foram publicados na segunda metade da década de setenta. Também causaram impacto considerável tanto do ponto de vista conceitual quanto de suas possíveis aplicações como modelos matemáticos para fenômenos em outras áreas da Ciência.

O primeiro deles foi do astrônomo-matemático Hénon sugerindo a existência de *atrator estranho para uma família quadrática de difeomorfismos dissipativos do plano \mathbf{R}^2* (cada difeomorfismo contrai área). A família proposta por Hénon tem por expressão

$$(x, y) \xrightarrow{f_{a,b}} (1 + y - ax^2, bx)$$

onde a e b são parâmetros reais ($-b$ é o Jacobiano da transformação em qualquer ponto). Ele considerou para seu experimento os valores $a \simeq 1,4$ e $b \simeq 0,3$ e percebeu um comportamento futuro bem complicado de muitas trajetórias que pareciam acompanhar uma linha invariante (variedade instável) contendo um ponto fixo do tipo sela da transformação; veja adiante na seção 2 estes conceitos. O fecho desta linha instável está contido em uma região limitada de \mathbf{R}^2 . Assim, um dos atratores para esta transformação seria o fecho de uma variedade instável ou uma órbita periódica atratora (poço) de período muito alto contida neste fecho. Devido à simplicidade topológica do espaço \mathbf{R}^2 , este atrator se não for um poço *não pode ser hiperbólico* como definido na seção 2: o chamaremos de *atrator estranho não hiperbólico* ou simplesmente *atrator estranho* desde que tenha certo grau de robustez e seja sensível às condições iniciais. Outra observação (óbvia): o experimento

computacional sugeriu a possibilidade de um atrator estranho em vez de uma órbita periódica atratora de período muito grande, mas não foi então (e não o é hoje e nem o será amanhã) possível decidir esta questão de caráter assintótico tão fino só com o uso do computador. Por outro lado, o uso inteligente do computador certamente motivou esta questão tão relevante em Dinâmica. Também é verdade que o uso do computador tem sido muito útil na demonstração de questões matemáticas intrincadas ("computer assisted proofs").

O problema sugerido pelo experimento de Hénon pode ser colocado da seguinte forma: *se existem b próximo a 0,3 e um conjunto de medida (de Lebesgue) positiva de valores de a próximos a 1,4 para os quais é possível definir uma região compacta $U_{a,b}$ tal que $f_{a,b}(U_{a,b}) \subset U_{a,b}$ e $f|_{U_{a,b}}$ exibe um atrator estranho.* A região $U_{a,b}$ deve ser escolhida como uma união finita de discos, isto é, da forma $D_{a,b} \cup f_{a,b}(D_{a,b}) \cup \dots \cup f_{a,b}^k(D_{a,b})$ onde $D_{a,b}$ é homeomorfo a um disco e k é algum inteiro positivo. Há poucos meses, em uma notável e difícil pré-publicação, Benedicks e Carleson (o mesmo Carleson de também notáveis contribuições à Análise Harmônica) resolveram a questão positivamente para valores de a próximos a 2 e de b bem pequenos (próximos a 0). (Anteriormente, Jacobson havia obtido uma versão deste resultado para a aplicação unidimensional $x \mapsto 1 - ax^2$.) Mais recentemente ainda, Mora e Viana, alunos de Doutorado do IMPA, generalizaram o resultado para o contexto bem mais abrangente de bifurcações homoclínicas ou, mais propriamente, de desdobramentos de tangências homoclínicas. Em particular, o resultado de Mora e Viana dá certamente uma resposta positiva à questão original de Hénon. Sobretudo, este resultado traduz-se na *existência abundante destes atratores estranhos* (do tipo Hénon como acima) *pele menos em Dinâmica uni e bi-dimensional!* Na verdade, *conjecturamos que qualquer difeomorfismo de uma superfície ou endomorfismo do intervalo ou do círculo digamos de classe C^3 ou C^∞ (as derivadas até ordem três, respectivamente de todas as ordens, contínuas) pode ser aproximado por um difeomorfismo ou endomorfismo hiperbólico (conjunto limite hiperbólico) ou então por um que exibe uma tangência homoclínica (próximo aqui significa que as transformações e suas derivadas de todas as ordens são próximas em todos os pontos do ambiente).* Daí decorreria a

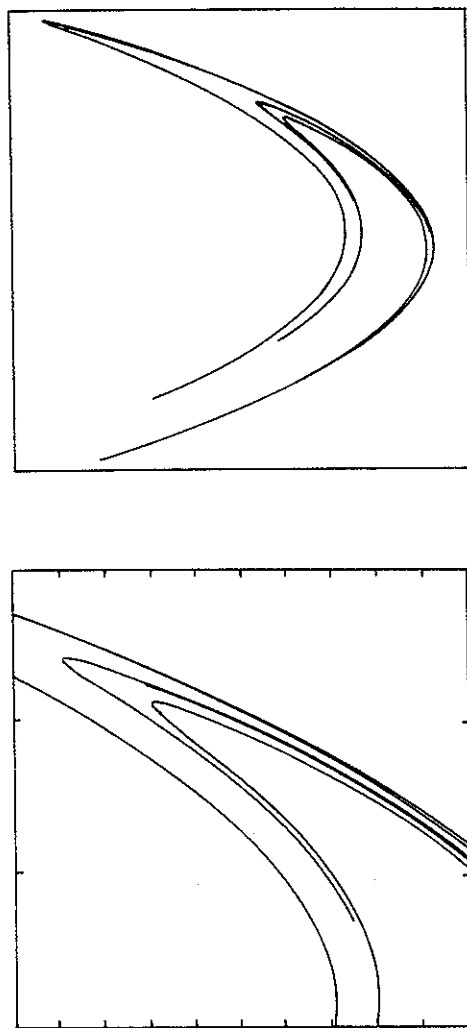


Figura 2. Atrator de Hénon

abundância dos atratores estranhos dentre as transformações que *não podem ser aproximadas por hiperbólicas (caóticas, turbulentas)*.

E o que significa órbita homoclínica? E a transformação ter seu conjunto limite hiperbólico? Antes de mencionarmos mais uma

destacada *descoberta* do final da década de setenta e concluirmos com nossa própria perspectiva sobre dinâmica dita caótica, torna-se necessário fazer uma discussão mais prolongada sobre alguns dos conceitos mencionados afim de clarificar os resultados anteriores e outros que ainda serão apresentados.

2. Comentários sobre Dinâmica Hiperbólica.

Antes de mais nada, consideremos o conceito básico de conjunto limite.

Seja f um difeomorfismo (ou endomorfismo) de classe C^∞ de uma variedade diferenciável M . Chamamos de *conjunto limite positivo* da órbita de f que passa por $x \in M$ ao conjunto $L^+(f, x) = \{y; \text{existe uma seqüência de inteiros } n_i \rightarrow \infty \text{ tal que } f^{n_i}(x) \rightarrow y\}$. O conjunto limite positivo de f é então definido como $L^+(f) = \bigcup_{x \in M} L(f, x)$, i.e. como o fecho do conjunto de pontos

limites das órbitas de f . Recordamos que a órbita positiva de f pelo ponto $x \in M$ é simplesmente $\{f^n(x); n \text{ inteiro e } n \geq 0\}$. Dizemos que f é *hiperbólico* se o fibrado tangente a M restrito a $L^+(f)$ decompõe-se em uma soma direta de dois fibrados invariantes pela derivada Df de f , isto é, $T_{L^+(f)}M = E^s \oplus E^u$. Pedimos ainda que $Df|E^s$ seja uniformemente contrativo e $Df|E^u$ uniformemente expansivo. O conceito de hiperbolicidade aplica-se a qualquer conjunto compacto $K \subset M$ que seja invariante por f , i.e. $f(K) \subset K$. Um resultado básico de Dinâmica afirma que por cada ponto x de um conjunto hiperbólico K existe uma variedade W_x^s tangente a E_x^s e que $f(W_x^s) = W_{f(x)}^s$. Ainda mais os pontos destas variedades chamadas de *estáveis* aproximam-se com razão geométrica (às vezes também dizemos exponencial) de K quando iterados positivamente por f . Quando K não se reduz a um conjunto finito (órbita periódica), chamamos (por abuso de linguagem) de folheação estável de K ao conjunto destas variedades invariantes e o denotamos $\mathcal{F}^s(K)$. Analogamente, para variedades instáveis W_x^u , $x \in K$, e folheação instável $\mathcal{F}^u(K)$. Em particular, uma órbita periódica, digamos $x, f(x), \dots, f^n(x) = x$, é dita hiperbólica se as normas de todos os autovalores de $Df^n(x)$ são diferentes de um: poço (fonte) se todos os autovalores têm norma menor (maior) que um e sela nos outros casos; a variedade estável tem dimensão máxima, zero ou intermediária, respectivamente.

Exemplo importante de difeomorfismo hiperbólico é o que denomina-se de Morse-Smale: $L^+(f)$ consiste de um número finito de órbitas periódicas todas hiperbólicas e suas variedades estáveis e instáveis cruzam-se de maneira transversal. Os campos gradientes correspondentes a funções de M em \mathbf{R} com pontos críticos não degenerados (funções de Morse) geram fluxos cujas transformações (andar ao longo das órbitas um tempo fixo $t \neq 0$) são difeomorfismos hiperbólicos como acima: o conjunto limite consiste de um número finito de pontos fixos todos hiperbólicos.

No outro extremo, existem os chamados difeomorfismos de Anosov: todo o fibrado TM , M compacto e sem bordo, decompõe-se em soma de dois fibrados Df -invariantes e uniformemente contrativo e expansivo, respectivamente. O exemplo mais simples é o difeomorfismo do toro T^2 induzido pelo isomorfismo linear de \mathbf{R}^2 dado, em coordenadas canônicas, pela matriz $L = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Observe que a origem de \mathbf{R}^2 é um ponto fixo hiperbólico e que os autovalores de L são irracionais. Também os autoespaços correspondentes têm inclinação irracional e, portanto, projetam-se em linhas invariantes e densas no toro: o toro é folheado por folhas estáveis e por folhas instáveis (densas).

Outro exemplo importante em que o conjunto limite *não é toda a variedade ambiente*, como o toro no exemplo anterior, *ou só um número finito de órbitas periódicas*, é o da chamada *ferradura* introduzida por Smale. Temos um retângulo $R = I_1 \times I_2$ e sua imagem, por um difeomorfismo f , na forma de uma *ferradura* (linear exceto no topo). O conjunto limite positivo obtém-se aqui como $K = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n(R)$, que é o *conjunto maximal invariante* de

$f|R$. Verifica-se que K é um *conjunto de Cantor* (acontecimento freqüente em Dinâmica!). De fato, observe que $R \cap f(R) \cap f^2(R)$ consiste de quatro retângulos de altura máxima dentro dos dois retângulos de $R \cap f(R)$, e assim por diante. Logo $\bigcap_{n \geq 0} f^n R$ é um

conjunto de Cantor K_{hor} vezes o intervalo I_1 . Analogamente, $\bigcap_{n \leq 0} f^n R$ é um conjunto de Cantor K_{ver} vezes o intervalo I_2 e,

finalmente, $\bigcap_{n \in \mathbf{Z}} f^n R = K_{\text{hor}} \times K_{\text{ver}} = K$, o que comprova a afirma-

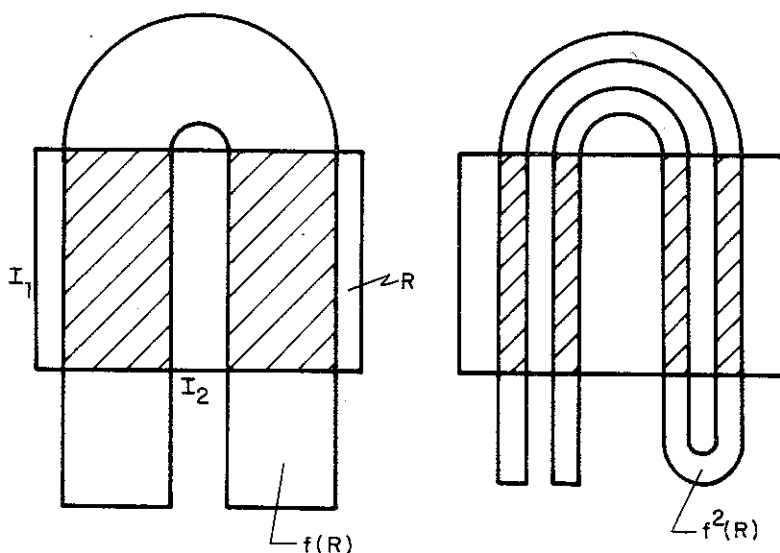


Figura 3. Ferradura de Smale

tiva. Neste caso da ferradura linear as folheações estável e instável são formadas de folhas horizontais e, respectivamente, verticais no retângulo R . Podemos definir na esfera S^2 um difeomorfismo f tal que $L^+(f) = K \cup \{S_1\} \cup \{S_2\}$, onde S_1 e S_2 são pontos fixos hiperbólicos atrator (poço) e repulsor (fonte). Reservamos os nomes de poço e fonte para órbitas periódicas atratora e repulsora, respectivamente. Estes exemplos e vários outros estão descritos nas referências [1] e [2].

Uma característica dos conjuntos hiperbólicos é que eles são robustos ou persistentes: não se destroem por pequenas perturbações de classe C^r , $r \geq 1$, do difeomorfismo inicial (isto decorre de um teorema de função implícita mais elaborado). Assim, seja g um difeomorfismo C^1 próximo de f (em cada ponto eles têm imagens próximas e derivadas próximas) onde f é, respectivamente, um difeomorfismo de Morse-Smale, o difeomorfismo linear de Anosov no toro T^2 ou o difeomorfismo correspondente à ferradura linear, como descritos acima. Então g também é, respectivamente, um difeomorfismo de Morse-Smale, de Anosov ou a ele corresponde uma ferradura dinâmica. No último caso,

isto quer dizer que $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} g^n R = K(g)$ é um conjunto de Cantor hiperbólico para g ; também $K_{\text{hor}}(g) = \left(\bigcap_{n \geq 0} g^n(R) \right) \cap I_2$ e $K_{\text{ver}}(g) = \left(\bigcap_{n \leq 0} g^n(R) \right) \cap I_1$ são conjuntos de Cantor.

Elaboremos um pouco mais o tema, visando especialmente a análise do comportamento assintótico das órbitas do difeomorfismo, isto é, de seu conjunto limite digamos positivo. Recordemos que um difeomorfismo diz-se hiperbólico se seu conjunto limite positivo for hiperbólico. Suponhamos agora que o difeomorfismo f de uma variedade compacta e sem bordo M seja hiperbólico e que todo difeomorfismo g que seja C^r ($r \geq 1$) suficientemente próximo de f também seja hiperbólico. Então f é C^r dinamicamente estável (conceito introduzido por Andronov e Pontryagin nos anos trinta): existe um homeomorfismo $h: L^+(f) \rightarrow L^+(g)$ conjugando f e g , i.e. $hf(x) = gh(x)$, $x \in L^+(f)$. Este é um resultado de dinâmica hiperbólica dos anos sessenta devido a Smale. Exigindo-se que a conjugação seja definida em todo o ambiente M , além da hiperbolicidade de $L_+(f)$ temos que impor a chamada condição de transversalidade: para todo par de pontos (x, y) em $L_+(f)$, suas variedades estável e instável se cortam transversalmente. Os resultados nesta direção são devidos a Palis-Smale que demonstraram a estabilidade dos difeomorfismos de Morse-Smale, Anosov no caso dos difeomorfismos que hoje têm o seu nome e, em sua versão mais geral, a Robbin e Robinson para os difeomorfismos hiperbólicos que satisfazem à condição de transversalidade. Em 1988, Mañé demonstrou que a recíproca é verdadeira: a estabilidade dinâmica de f em todo M e em classe C^1 , implica em sua hiperbolicidade. Baseados neste belo resultado de Mañé, provamos exatamente a recíproca em classe C^1 do resultado de Smale acima mencionado: se $f|L^+(f)$ é dinamicamente estável então f é hiperbólico e todo difeomorfismo g próximo de f também é hiperbólico. Assim, *hiperbolicidade e estabilidade dinâmica* são conceitos intimamente relacionados.

Como mencionamos na introdução deste artigo, *um atrator hiperbólico não-trivial (isto é, que não contém órbita periódica atratora) é sempre estranho*: sua bacia de atração, formada por pontos cujo conjunto limite está contido no atrator, exhibe, até com probabilidade total, sensibilidade em relação às condições iniciais.

Observamos também que o atrator de Lorenz não é hiperbólico: ele é persistente ou robusto (todo campo de vetores C^r próximo do inicial também exibe um atrator com as mesmas propriedades) mas não é dinamicamente estável. Isto é, não existe em geral um homeomorfismo do atrator inicial para o perturbado levando trajetórias do campo inicial em trajetórias do campo perturbado. A situação para o atrator estranho do tipo Hénon é ainda mais sutil: ele é persistente só probabilisticamente (conjunto de valores do parâmetro de medida positiva) e, como já foi dito, ele não é hiperbólico e também não é dinamicamente estável.

Finalmente, definimos órbita homoclínica, como se segue. O conceito foi introduzido por Poincaré há exatamente cem anos em um famoso trabalho sobre a estabilidade do sistema solar pelo qual ganhou um prêmio do Rei da Suécia. Uma curiosidade histórica: a versão original, *logo depois corrigida por Poincaré*, continha um erro incrivelmente elementar mas sério em termos do trabalho, o qual será indicado logo a seguir. Seja p um ponto fixo hiperbólico para f do tipo sela e W_p^s e W_p^u suas variedades estável e instável. Dizemos que a órbita de x , $x \neq p$, é homoclínica se x pertence à $W_p^u \cap W_p^s$. O que Poincaré supôs inicialmente, quando estudava a dinâmica de um difeomorfismo de superfície, foi que a existência de uma órbita homoclínica implicava na *total* coincidência de uma componente de $W_p^u - p$ e outra de $W_p^s - p$! Com isso ele ignorava em particular a possibilidade de órbitas homoclínicas transversais, ou seja onde W_p^s e W_p^u se cortam transversalmente (não são tangentes). Para se ter uma idéia da riqueza dinâmica de um difeomorfismo f que exibe uma órbita homoclínica transversal, basta dizer que isto implica a *existência de um conjunto f -invariante de Cantor hiperbólico* (uma ferradura) *contendo a órbita!* O resultado é devido a Smale (1965), sendo que antes dele Birkhoff havia mostrado que uma órbita homoclínica transversal é sempre acumulada por órbitas periódicas do tipo sela. Muito mais rica ainda é a *evolução dinâmica* de uma família de difeomorfismos f_μ que, digamos para $\mu = 0$, exibe uma *tangência homoclínica que se desdobra em duas órbitas homoclínicas transversais* para $\mu > 0$.

Antes da análise desta questão com que concluiremos esta exposição, mencionaremos mais uma contribuição relevante de físicos-matemáticos aos Sistemas Dinâmicos e, também, às aplicações desta teoria em outras áreas da Ciência.

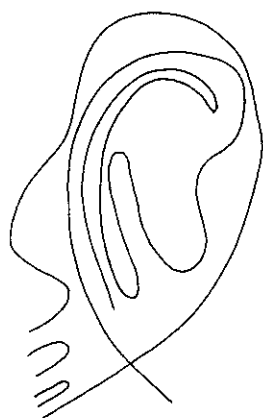
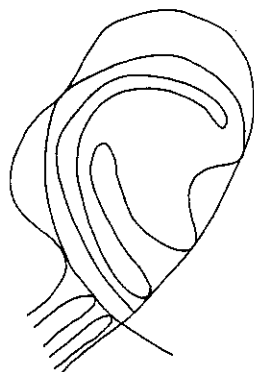
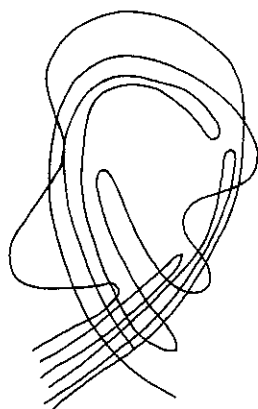
 $\mu < 0$  $\mu = 0$  $\mu > 0$

Figura 4. Desdobramento de Tangência Homoclínica

3. O Trabalho de Feigenbaum, Couillet-Tresser.

A contribuição que agora relataremos, baseada inicialmente em experimento computacional, é devida a Feigenbaum por um lado e a Couillet e Tresser por outro. Feigenbaum também indicou um esquema para a demonstração matemática de sua surpreendente descoberta. Considere a família de endomorfismos $f_\mu(x) = 1 - \mu x^2$ do intervalo $[-1,1]$, $0 \leq \mu \leq 2$. Verifica-se que existem *cascatas de duplicação de períodos*: seqüências de valores do parâmetro $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n \leq \dots$ tais que $f_\mu(x)$, para μ próximo à esquerda de μ_n , exibe um ponto periódico atrator x_n de período $k2^{n-1}$, (para algum $k \geq 1$) e um ponto periódico atrator de período $k2^n$ para μ próximo mas à direita de μ_n . O fato notável é que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} = 4,6692\dots$, qualquer que a seja a seqüência como acima e, mais ainda, qualquer que seja a família quadrática de endomorfismos do intervalo que se considere! Na verdade, a classe de famílias para as quais a constante acima é válida é ainda mais ampla, mas não discutiremos este ponto aqui. Assim, tal constante é *universal* pelo menos para as famílias quadráticas de endomorfismos. Se as famílias são cúbicas a elas está associada outra constante universal, e assim por diante. Ressaltamos também que resultados análogos (Collet, Eckman e Koch) são válidos em dimensões maiores (várias variáveis)! Faremos duas observações a mais a respeito destas constantes universais.

A primeira é que elas são obtidas como autovalores de pontos fixos hiperbólicos de operadores (ditos de renormalização) em um conveniente espaço de Banach (espaço de aplicações). A demonstração desdobra-se em várias etapas e corresponde a trabalhos isolados ou em conjunto de Collet, Eckman, Ruelle, Campanino, Epstein, Lanford, Koch... . A segunda observação diz respeito às aplicações experimentais: quando se estabelece um modelo para um certo fenômeno, é importante que se possa de algum modo testá-lo em experimentos. Pois é exatamente o que se passa com estas constantes universais. De fato, em princípio, pode-se determinar teoricamente a constante a partir do modelo e, por outro lado, pode-se observar o processo de duplicação de períodos em experimentos, marcando-se a seqüência de valores do parâmetro para o qual ela ocorre, e a partir daí calcular a constante. Se os dois valores coincidirem em vários experimentos, há uma boa

chance de que o modelo seja adequado.

Ilustramos o processo de duplicação de períodos da forma esquemática que se segue, em que indicamos os poços com setas convergentes e as fontes com setas divergentes. Além disto, definimos $g_\mu = f_\mu^{k \cdot 2^{n-1}}$ e supomos, para simplificar, que $g_\mu(x_n) = x_n$ para μ próximo a μ_n :

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} x_n \\ \leftarrow \bullet \rightarrow \\ -1 < g'_\mu(x_n) < 0 \\ \mu < \mu_n \end{array} &
 \begin{array}{c} x_n \\ \leftarrow \bullet \rightarrow \\ g'_{\mu_n}(x_n) = -1 \\ (g_{\mu_n}^2)''' < 0 \end{array} &
 \begin{array}{c} y^* \quad x_n \quad y \\ \leftarrow \bullet \rightarrow \leftarrow \bullet \rightarrow \\ \mu > \mu_n, \quad g'_\mu(x_n) < -1 \\ y^* = g_\mu(y), \quad y = g_\mu^2(y) \end{array}
 \end{array}$$

É relevante salientar também que se $\mu_\infty = \lim \mu_n$, para uma seqüência μ_n de bifurcações de duplicação de período como acima, então o conjunto limite de f_{μ_∞} consiste de uma infinidade de pontos periódicos repulsores (fontes) cujos períodos se duplicam e de um conjunto de Cantor como atrator. Mais interessante ainda é observar que f_μ passa por muitas bifurcações (regime caótico) para μ próximo a μ_∞ . De fato, o resultado de Mora-Viana, generalizando aqueles de Jacobson e Benedicks-Carleson, aplica-se, muito em particular, a este caso: existe um conjunto de medida positiva de valores do parâmetro para os quais a aplicação exhibe "atrator estranho" e não é, portanto, hiperbólica. Mesmo assim, *conjectura-se* que as aplicações hiperbólicas são densas no espaço de aplicações analíticas ou C^∞ do intervalo.

4. Bifurcações Homoclínicas.

Como colocar no mesmo cenário as mudanças da dinâmica (bifurcações) de uma família a um parâmetro f_μ de difeomorfismos ou endomorfismos? Um cenário que englobe a existência de atratores não hiperbólicos, como os atratores estranhos persistentes (conjunto de valores do parâmetro de medida positiva) das famílias quadráticas no plano ou no intervalo, e as cascatas de duplicação de períodos, bem como outro importante fenômeno, que comentaremos adiante, que é a possível *coexistência de uma infinidade de poços* para o mesmo difeomorfismo. O que queremos propor neste trabalho é que o elo de ligação entre estes diversos fenômenos caóticos é precisamente a bifurcação homoclínica, pelo menos quando a variedade ambiente é de dimensão dois (superfícies) ou

um (círculo, intervalo). A proposta tem origem, por um lado, nos resultados que enunciaremos ao final do artigo mostrando efetivamente que a *bifurcação homoclínica implica a ocorrência de todos os fenômenos caóticos citados*. Ainda mais, já é possível dizer em muitos casos qual ou quais são os fenômenos prevalentes, para valores do parâmetro próximos ao valor de bifurcação, em termos de certas dimensões fracionárias (de conjuntos de Cantor). Por outro lado, conjecturamos que qualquer difeomorfismo que exhibe um destes fenômenos pode ser aproximado digamos em classe C^3 por outro que tenha uma bifurcação (tangência) homoclínica.

A Figura 5 indica duas situações bem expressivas para a formulação de nosso objetivo: a primeira delas envolve apenas um ponto fixo p_μ e uma tangência homoclínica a ele associada; a segunda envolve um conjunto de Cantor hiperbólico K_μ correspondente a uma ferradura e uma órbita de tangência homoclínica associada a um de seus pontos fixos. Observe que K_μ é o fecho das órbitas homoclínicas transversais assinaladas na figura. Podemos supor que a tangência homoclínica é quadrática (contato de ordem dois) e que ela ocorre para $\mu = 0$, isto é para f_0 . A dupla seta indica que a contração da derivada Df_μ é mais forte do que a expansão: f_μ é dissipativa em uma vizinhança de K_μ ou de p_μ .

A questão que se coloca é: qual é, para $|\mu|$ pequeno, a dinâmica de f_μ em uma vizinhança de p_μ ou K_μ e da órbita de tangência? Em outras palavras: se U_1 é uma vizinhança pequena de p_μ ou K_μ e $U_{2,\mu}$ é uma vizinhança da órbita de tangência constituída pelos discos de raio digamos 2μ centrados nos pontos da órbita, então o que podemos dizer dinamicamente do conjunto maximal invariante L_μ de $f_\mu|U_\mu$ para μ pequeno? U_μ aqui indica a união de U_1 e $U_{2,\mu}$. Suporemos a partir de agora que $f_\mu|U_\mu$ seja dissipativa ou contraia área, isto é que o Jacobiano de Df_μ seja menor que 1 em todos os pontos de U_μ . Detalhando a pergunta acima: não importa quão pequeno seja $\delta > 0$, existem atratores estranhos para $f_\mu|U_\mu$ para μ em subconjuntos de intervalo $(-\delta, \delta)$ de medida positiva? Existem cascatas de bifurcações de duplicação de período? L_μ é hiperbólico para muitos valores de μ ? Ainda, exhibe $f_\mu|U_\mu$ uma infinidade de poços simultâneos para muitos valores de μ ?

É importante salientar que não se procura responder à indagação acima para todos os valores do parâmetro μ próximos

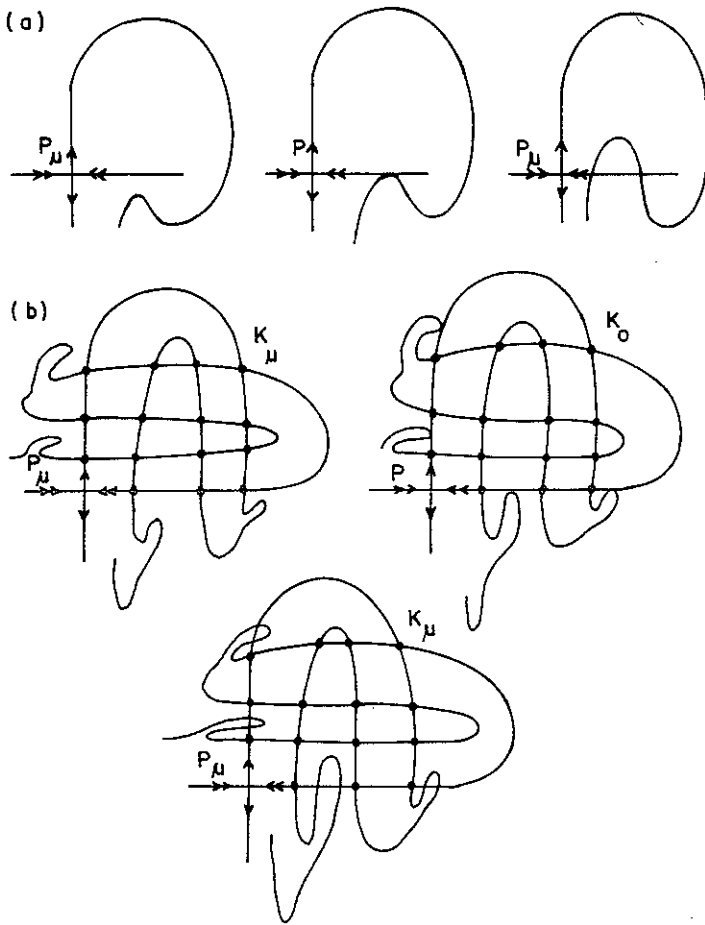


Figura 5. Desdobramentos de Tangências Homoclínicas

a zero, pois isto nem é possível! O que se busca é determinar qual a característica dinâmica mais *prevalente* de $f_\mu|U_\mu$ em termos do parâmetro μ (μ pequeno), isto é quando se desenvolve um processo de criação de uma tangência homoclínica e sua transformação em órbitas homoclínicas transversais (*desdobramento da tangência homoclínica*). Observe que quando a órbita homoclínica passa a ser transversal (digamos para $\mu > 0$), então o conjunto

maximal invariante L_μ contém necessariamente um conjunto de Cantor hiperbólico, como vimos na discussão da ferradura. Isto não exclui que contenha também atratores estranhos, infinidade de poços, bifurcações de duplicação de período e outros fenômenos de descrição ainda mais complicada.

Para a formulação, em uma visão integrada, do que já sabemos e do que conjecturamos sobre esta questão necessitamos do conceito de *dimensão de Hausdorff* (*dimensão fracionária*). Tal como a *espessura* (de que falaremos mais adiante), ela nos dá uma estimativa da "densidade" de um conjunto de Cantor, de quanto ele é "cheio" ou quanto é "rarefeito". Observamos que a idéia de medida de Lebesgue é, no presente contexto, demasiado grosseira para este fim (conjuntos de Cantor de ferraduras dinâmicas têm sempre medida nula) e a definição de dimensão de Hausdorff, que apresentamos em seguida, é de fato um seu refinamento. Seja K um subconjunto compacto de \mathbf{R} ou \mathbf{R}^2 (ou de um espaço métrico qualquer). Inicialmente definimos, para $\alpha > 0$,

$$H_\alpha = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{C \in \mathcal{C}_\varepsilon} \sum_{A_i \in C} (\text{diâmetro}(A_i))^\alpha$$

onde $C = \{A_i\}$ é uma cobertura finita de K por discos de raio inferior a ε e \mathcal{C}_ε é o conjunto de tais coberturas. Não é difícil verificar que existe $\alpha^* \geq 0$ tal que $H_\alpha = 0$ para $\alpha > \alpha^*$ e $H_\alpha = \infty$ para $\alpha < \alpha^*$ (se $\alpha^* > 0$). Denominamos α^* de dimensão de Hausdorff de K e denotamos $\alpha^* = DH(K)$. Se K é um conjunto de Cantor de uma ferradura dinâmica, então $0 < DH(K) < 1$ se $K \subset \mathbf{R}$ e $0 < DH(K) < 2$ se $K \subset \mathbf{R}^2$. Além disto, nestes casos temos que

$$DH(K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{-\log \varepsilon}$$

sendo $N(\varepsilon)$ o número mínimo de discos de raio ε necessários para cobrir K . A expressão à direita é conhecida como capacidade limite ou dimensão capacidade e, em geral, mais fácil de ser computada diretamente a partir de sua definição. No caso do tradicional conjunto de Cantor terciário $K_{1/3}$ do intervalo $[0,1]$, onde em cada etapa de sua formação retiramos o terço médio dos intervalos que restam, temos $DH(K_{1/3}) = \frac{\log 2}{\log 3}$. Mais geralmente, se retiramos

um intervalo de razão β do meio de cada intervalo que resta no processo de formação do conjunto de Cantor, então

$$DH(K_\beta) = \frac{\log 2}{\log 2 - \log(1 - \beta)}$$

Já no caso de uma ferradura linear ou não, temos

$$\begin{aligned} DH(K) &= DH(K_{\text{hor}}) + DH(K_{\text{ver}}) \\ DH(K(g)) &= DH(K_{\text{hor}}(g)) + DH(K_{\text{ver}}(g)). \end{aligned}$$

A idéia de espessura de um conjunto de Cantor foi introduzido por Newhouse que a usou para dar exemplos robustos de difeomorfismos com um número infinito de poços. Ele mostrou que, se a ferradura envolvida em uma bifurcação homoclínica é bastante “cheia” (se a sua espessura é maior que 1), então a família de difeomorfismos f_μ exibe novas *tangências* homoclínicas *persistentemente* em todo um intervalo $(0, \delta)$: para um subconjunto denso de valores de μ nesse intervalo. Por outro lado, quando uma tangência homoclínica é desdobrada sempre existem valores do parâmetro próximos do valor de tangência para os quais o difeomorfismo tem algum poço próximo da órbita homoclínica. Combinando este fato relativamente simples com a propriedade acima, ele concluiu que para um conjunto residual de valores de μ em $(0, \delta)$, f_μ tem uma infinidade de poços. Posteriormente, ele pôde mesmo mostrar o fato surpreendente de que o desdobramento de qualquer tangência homoclínica (independentemente da espessura inicial) sempre acarreta a formação de ferraduras pequenas mas muito espessas e portanto sempre inclui fenômenos de persistência de tangências e infinidade de poços! (Veja o Fato 1 abaixo). A definição de espessura é a seguinte. Tomemos C um conjunto de Cantor de um intervalo, como os conjuntos de Cantor terciário ou β -intermediário, citados acima, ou como os conjuntos K_{hor} e K_{ver} da ferradura. Podemos sempre considerar que o conjunto C é formado em etapas sucessivas, por retiradas de subintervalos dos intervalos que restaram da etapa anterior. Supomos além disso que essas retiradas se fazem por ordem não-crescente dos comprimentos dos subintervalos (“buracos” maiores são formados primeiro). Definimos, então, a espessura de C como

$$\tau(C) = \inf_i \left(\frac{\ell(S_{1,i})}{\ell(b_i)}, \frac{\ell(S_{2,i})}{\ell(b_i)} \right)$$

onde ℓ indica comprimento, b_i é um segmento retirado em uma certa etapa de um segmento que resta da etapa anterior, e $S_{i,1}$ e $S_{i,2}$ são os segmentos adjacentes a b_i que restam após sua retirada. Para o conjunto de Cantor terciário a espessura é igual a 1 e, em geral, para o conjunto β -intermediário a espessura é $\frac{1-\beta}{2\beta}$. Para uma ferradura K definimos a sua espessura como $\tau(K) = \tau(K_{hor}) \times \tau(K_{ver})$ ou $\tau(K(g)) = \tau(K_{hor}(g)) \times \tau(K_{ver}(g))$.

Podemos agora enunciar os seguintes fatos relativos ao desdobramento de uma tangência homoclínica de uma família de difeomorfismos f_μ como acima. Suporemos, como antes, que a tangência homoclínica esteja associada a uma ferradura que denotaremos por K (seja ela linear ou não) ou a um ponto fixo tipo sela p .

Fato 1 (Newhouse). *Existem sempre intervalos de valores do parâmetro I_i próximos a $\mu = 0$ e subconjuntos residuais (interseção enumerável de conjuntos abertos e densos, genérico no sentido de categoria de Baire) $N_i \subset I_i$ tais que se $\mu \in N_i$ então f_μ exibe uma infinidade de poços.*

Fato 2 (Mora-Viana, baseados em Benedicks-Carleson). *Existem sempre conjuntos de valores do parâmetro de medida positiva próximos de $\mu = 0$, tal que se μ pertence a um tal conjunto então f_μ exibe um atrator estranho.*

Fato 3 (Yorke-Alligood). *Existem sempre cascatas de bifurcação de duplicação de período próximas de $\mu = 0$.*

Observamos que as cascatas de duplicação de períodos, podem preceder ou não o início do regime caótico, isto é de dinâmica complicada ou de muitas bifurcações.

Fato 4 (Palis-Takens). *Se $DH(K) < 1$ ou se a tangência estiver associada a um ponto fixo p , então*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(H_{(-\delta, \delta)})}{2\delta} = 1$$

onde $H_{(-\delta, \delta)}$ corresponde aos valores do parâmetro μ em $(-\delta, \delta)$ para os quais f_μ é hiperbólico e m indica a medida de Lebesgue do conjunto.

Assim se a dimensão fracionária de K é pequena (é claro que no caso do ponto fixo ela é zero), a hiperbolicidade de f_μ prevalece próximo de $\mu = 0$. Neste caso, os atratores estranhos e a coexistência de uma infinidade de poços são fenômenos relativamente esparsos. O mesmo não se pode afirmar quando $DH(K) > 1$ como deduz-se do resultado seguinte.

Fato 5 (Palis-Yoccoz). Se $DH(K) > 1$, então para a "maioria" das famílias de difeomorfismos f_μ como acima, temos

$$\liminf_{\delta \rightarrow 0} \frac{m(H_{(-\delta, \delta)})}{2\delta} < 1$$

onde \liminf indica o limite inferior.

Por outro lado o nosso conhecimento atual sugere que do ponto de vista de medida a infinidade de poços é sempre um fenômeno raro.

Conjectura. A medida de Lebesgue dos conjuntos (deNewhouse) correspondentes a coexistência de uma infinidade de poços é sempre zero.

Conjectura. Se $\tau(K) > 1$ (o que implica $DH(K) > 1$), então os atratores estranhos prevalecem próximo de $\mu = 0$.

O panorama previsto poderia ser assim resumido:

- (i) se a dimensão de Hausdorff de K for menor do que u_m , prevalece a hiperbolicidade de f_μ ,
- (ii) se a dimensão de Hausdorff de K for maior que u_m , mas sua espessura for menor que u_m , então prevalecem a hiperbolicidade e os atratores estranhos,
- (iii) se a espessura de K for maior que u_m , prevalecem os atratores estranhos.

Encerramos nossa discussão com duas observações finais. A primeira delas é de que vários dos resultados acima estão sendo

demonstrados em dimensões mais altas, especialmente quando a variedade instável de K ou p tem dimensão um (o chamado caso de codimensão um). No entanto, para que possa emergir em dimensões mais altas uma perspectiva de panorama tão abrangente como o acima ((i) a (iii)), parece-nos importante que ainda se obtenha um certo número de novos resultados. Neste sentido vários estudos estão em andamento, dentre os quais os de L.J. Diaz e M.F. Carvalho. Ainda assim, propomos a seguinte conjectura em dimensão qualquer: *todo difeomorfismo (transformação) pode ser C^r ($r \geq 1$) aproximado por um difeomorfismo (transformação) hiperbólico ou que exiba uma bifurcação homoclínica e, especificamente em dimensão um ou dois, por um hiperbólico ou que exiba uma tangência homoclínica*. Citamos que para difeomorfismos de classe C^1 em superfícies bidimensionais, esta conjectura foi essencialmente comprovada por Araújo e Mañé. Quanto a campos de vetores, deveremos absorver em nosso possível panorama o fenômeno de atratores tipo Lorenz (discutidos na seção 1 deste artigo) e ciclos singulares presentemente estudados por Bamon, Labarca, Mañé e Pacifico.

BIBLIOGRAFIA

1. J. Palis e W. de Melo, "Geometric theory of dynamical systems," Springer-Verlag, 1982.
2. J. Palis e F. Takens, "Homoclinic bifurcations and hyperbolic dynamics," Uma versão substancialmente ampliada será publicada pela Cambridge University Press sob o título "A theory of homoclinic bifurcations: hyperbolicity, fractional dimensions and infinitely many attractors", Atas do 16º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 1987.
3. D. Ruelle, "Elements of differentiable dynamics and bifurcation theory," Academic Press, 1989.