Uma Breve Conversação com John Milnor

Em julho de 1989 esteve pela primeira vez em visita ao Brasil o renomado matemático norte-americano John Milnor, do Institute for Advanced Study de Princeton. Sua vinda prendeu-se às comemorações no IMPA do 60º aniversário do Professor Elon Lages Lima. Durante os 8 dias de sua estada no Rio, Milnor participou também do Workshop em Sistemas Dinâmicos. Na oportunidade, ele respondeu algumas perguntas de Matemática Universitária. John Milnor é conhecido por suas notáveis contribuições à Topologia. Já aos 18 anos, ele provou que a curvatura total de um nó diferenciável em $\mathbf{R}^3$ é $\geq 4\pi$. Em 1956, no Simpósio Internacional de Topologia, realizado no México, ele surpreendeu a todos com a prova de que há várias estruturas diferenciáveis distintas na esfera S^7. Por esse trabalho, Milnor ganhou a Medalha Fields, o maior dos prêmios matemáticos, em 1962. Outras contribuições notáveis de Milnor à Topologia são seu contra-exemplo à Hauptvermutung (vide entrevista), a teoria das "microbundles", a prova de que S^1, S^3 e S^7 são as únicas esferas paralelizáveis, etc. A importância dos trabalhos de Milnor também se fez presente na teoria de formas quadráticas, na Geometria Diferencial e na Teoria dos Jogos. Recentemente, ele passou a interessar-se pela teoria dos Sistemas Dinâmicos. Sua última distinção acadêmica foi o recebimento do Prêmio Wolff, em Israel, 1989, conjuntamente com o matemático argentino Alberto Calderón.

Comecemos por alguns dados iniciais. Como surgiu sua inclinação pela Matemática? Qual foi a escola secundária que você cursou?

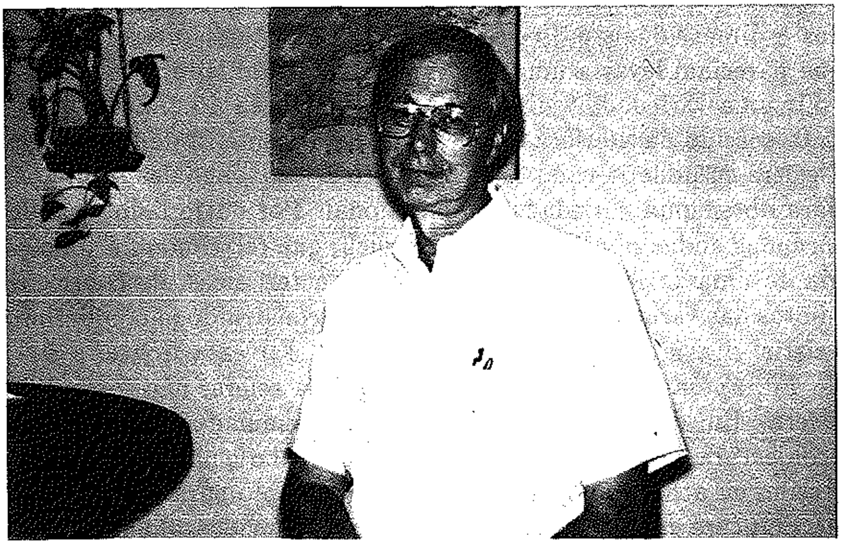
Eu cresci em New Jersey e freqüentei a escola secundária local. Ingressei em seguida na Universidade de Princeton e freqüentei todo tipo de curso: Inglês, Física, Filosofia e Matemática. O ambiente no departamento de Matemática era maravilhoso: Ralph Fox, Emil Artin e Norman Steenrod estavam lá, assim como Albert Tucker. Era fácil conversar com eles. Minha inclinação pela Matemática nasceu de uma forma muito espontânea. Lembro-me de um curso de Topologia ministrado por Ralph Fox, que utilizava o método de Moore: os estudantes tinham que fornecer as demonstrações dos resultados apresentados em classe. Era um excelente treinamento. Naquela época eu já gostava mais de Matemática do que de qualquer outra matéria.

Antes mesmo de se graduar, você provou um resultado importante sobre curvas fechadas. Poderia nos contar alguma coisa a respeito?

De fato. Foi no meu segundo ano na Universidade. Eu tinha 18 ou 19 anos e freqüentava um curso dado por Albert Tucker. Sabia-se que toda curva fechada em $\mathbf{R}^3$ tem curvatura total de pelo menos 2π (Teorema de Fenchel.) Tucker mencionou o problema de provar que a curvatura total de toda curva fechada em $\mathbf{R}^3$, que possui um nó, é pelo menos 4π (conjetura de Borsuk.) Eu o resolvi.

E a sua inclinação pela Topologia, também surgiu espontaneamente?

Sim. Nessa época vários topólogos estavam em Princeton. Mencionei Fox e Steenrod e deveria citar também Lefschetz. A presença e o trabalho desses homens eram uma motivação muito forte.



John Milnor durante sua visita ao IMPA (agosto de 1989)

Onde você fez a sua pós-graduação?

Fui para a Suiça e estudei com Hopf. Minha tese de doutorado foi escrita sob a orientação de Fox, depois da minha volta a Princeton. Estava ligada à isotopia de laços em Topologia tridimensional. Nesse período, passei algum tempo na Rand Corporation estudando Teoria de Jogos. Estava interessado em Jogos contra a Natureza. Você procura estratégias ótimas em situações onde não há (quase) informação, embora você saiba que algumas escolhas são melhores do que outras.

Em algum momento você se interessou por problemas topológicos em dimensão maiores. Como aconteceu isso?

Foi principalmente em função da influência de Henry Whitehead que comecei a trabalhar em dimensões mais altas. Eu estava tentando compreender os tipos mais simples de variedades fechadas, com interesse especial em variedades $2n$-dimensionais fechadas que são $n-1$ conexas. Em 1956 passei um tempo no México trabalhando em variedades 4-dimensionais fechadas e simplesmente conexas. Quando tentei compreender variedades fechadas 8-dimensionais e 3-conexas eu tinha dois enfoques diferentes que pareciam levar a uma contradição. Por um lado, podia construir uma variedade 8-dimensional E^8 partindo de um certo produto torcido da 4-esfera e o 4-disco. Se a fronteira de E^8 fosse a 7-esfera eu poderia colar E^8 e o 8-disco D^8 ao longo das fronteiras para obter uma variedade 8-dimensional. Por outro lado, usando fórmulas dadas por Thom e Hirzebruch, que relacionam a topologia de uma variedade e suas classes características, descobri que muitas das variedades que eu pensava ter construído não poderiam existir. Havia um erro em algum lugar. Talvez a fronteira ∂E^8 de E^8, apesar de ter a homotopia de uma esfera, não fosse uma esfera. Em dimensão 3, Poincaré havia formulado esta pergunta (conjectura de Poincaré, ver janela), que até hoje não foi resolvida. Assim, eu achava que tinha um contra-exemplo para a conjectura de Poincaré generalizada em dimensão 7. (Incidentalmente, poucos anos mais tarde Smale conseguiu uma prova da conjectura de Poincaré generalizada para dimensão ≥ 4.) Entretanto, depois de estudar minha variedade em detalhes, consegui construir um homeomorfismo entre ∂E^8 e a 7-esfera. Logo, ainda estava com uma contradição. A única possibilidade que restava era que as estruturas diferenciais de ∂E^8 e da 7-esfera fossem diferentes e isto eu consegui provar.

Foi este o surpreendente resultado que o levou a receber a medalha Fields. Há outros tópicos em Topologia que você tratou com muito sucesso: classes características, teoria de Morse etc.

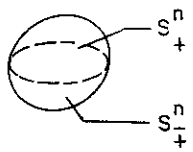
Dei uma série de palestras sobre classes características que foram publicadas.

A teoria de Morse me interessou porque é um enfoque diferente se bem que, estreitamente relacionada ao estudo das variedades, como a teoria de cobordismo de Thom. Todas estas teorias ainda estão cheias de vitalidade. Houve uma interessante mudança de rumo no enfoque da Topologia. No princípio, os fundamentos eram tão pouco firmes que não havia uma distinção clara entre a Topologia Diferencial, a Topologia linear por partes e a Topologia pura.

CONJECTURA DE POINCARÉ

Esta foi resolvida em dimensões ≥ 5 por Smale usando o seguinte argumento. Sejam Σ uma variedade compacta, sem bordo, de dimensão $n \geq 5$ e Σ_o a variedade Σ menos o interior de um disco Δ em Σ (isto é $\Delta \cong D^n$ onde $\cong$ significa difeomorfismo)

Por exemplo, se Σ é a esfera S^n podemos tomar $\Delta = S^n_+$ e então $\Sigma_o = S^n_-$.



Smale mostrou que $\Sigma_o \cong D^n \Leftrightarrow \Sigma_o$ é contrátil (isto é, existe uma deformação contínua de Σ_o em Σ_o levando cada ponto de Σ_o num dado ponto de Σ_o). Por exemplo D^n é contrátil, a fórmula sendo $x_t = tx$ onde $x \in D^n$ e $0 \leq t \leq 1$.

Então a implicação "$\Leftarrow$" é fácil de se verificar.

Para provar a recíproca, Smale começou com uma função C^∞ (de Morse) $f\colon \Sigma_o \to \mathbf{R}$ tal que

(1) Σ_o é uma superfície de nível de f.

(2) Numa vizinhança de cada ponto Σ_o, f é da forma $f(x) = x_1$ ou $f(x) = -x_1^2 - \cdots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \cdots + x_n^2$, em coordenadas locais apropriadas.

No segundo caso, o ponto $(0, \ldots, 0)$, é um ponto crítico (com índice k).

Usando a hipótese de que Σ_o é contrátil, Smale conseguiu "cancelar" pares de pontos críticos de índices k e $k+1$ até chegar a uma função com um único ponto crítico de índice 0.

Usando o fluxo gradiente associado a esta função é agora relativamente fácil ver que $\Sigma_o \cong D^n$.

Qual é a História da Hauptvermutung?

Bem, os grupos de homologia foram definidos por Betti e Poincaré e, é claro, a questão era saber até que ponto eles eram invariantes. Isto levou à Hauptvermutung: "se dois poliedros são homeomorfos, então eles têm subdivisões isomorfas". Eu apresentei um contra-exemplo.

Como se viu, meu resultado sobre a 7-esfera serviu para esclarecer que a categoria diferencial e a categoria topológica eram diferentes. O contra-exemplo à Hauptvermutung mostrou que a categoria linear por partes e a categoria topológica também são essencialmente diferentes. Tudo isso deu origem a diferentes rumos na Topologia.

Onde você situaria o trabalho dos topólogos brasileiros?

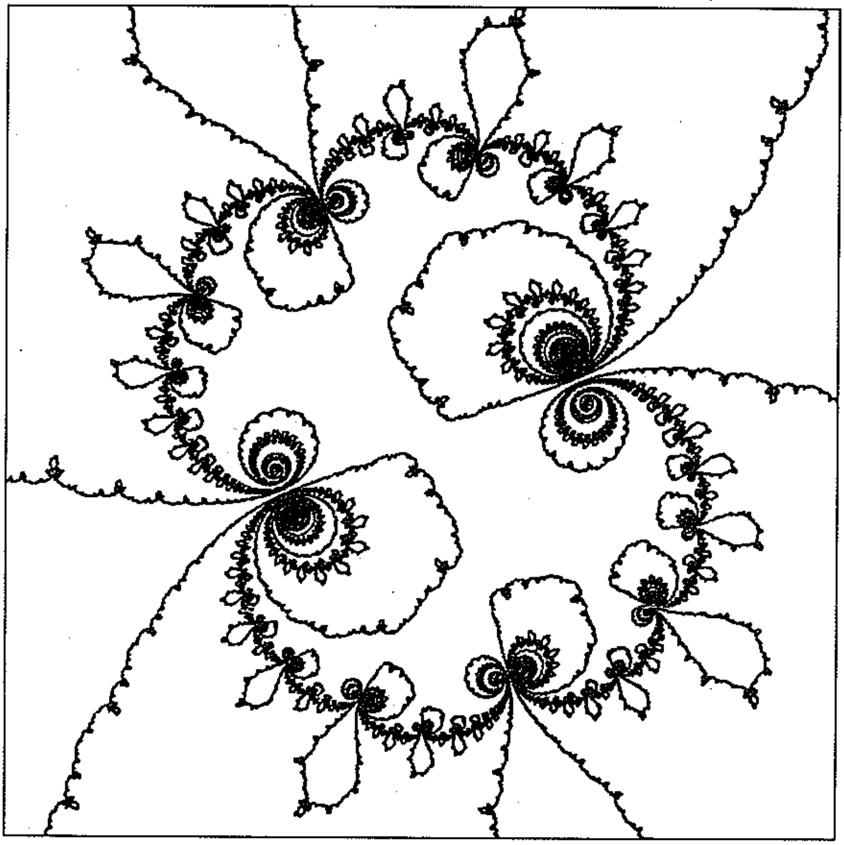
Elon Lima provou que é impossível haver dois campos vetoriais independentes sobre a 3 esfera que comutem entre si. Foi um resultado fundamental e pioneiro. A questão geral ainda está em aberto e pouco tem sido feito a respeito. Por um lado, isso enfatiza a importância do seu trabalho e por outro o deixa ligeiramente isolado, esperando uma continuação. Não deveríamos esquecer que Paul Schweitzer, apesar de não ser brasileiro de nascimento, trabalha no Brasil há muitos anos. Schweitzer teve o mérito de construir o famoso contra-exemplo C^1 da conjectura de Seifert, outra realização relevante que aguarda uma continuação. Ambos contribuiram substancialmente para a solução de problemas difíceis.

Mudando de assunto, em referência a seu trabalho mais recente, como você descreveria sua mudança para os Sistemas Dinâmicos?

Acho que duas razões foram determinantes: uma, que fiquei fascinado com o estudo de Thurston da iteração de aplicações 1-dimensionais. Outra, achei que os Sistemas Dinâmicos são um campo ideal para combinar trabalho computacional e trabalho teórico. Preciso confessar que antes da minha mudança fiz um esforço mal-sucedido de escrever um livro de introdução à Física Matemática do ponto de vista geométrico.

Creio que tinha me tornado um pouco cansado de atacar problemas em Topologia Diferencial e estava desejando trabalhar numa área que permitisse outras técnicas de pensamento.

Alegra-me o fato de os Sistemas Dinâmicos serem um campo tão exuberante, com gente trabalhando a partir dos mais diversos pontos de vista e com técnicas tão diferentes.



Parte de uma curva de Jordan que é o conjunto de Julia de um polinômio cúbico. Obtida por John Milnor