Problemas e Soluções

Matemática Universitária Nº 9/10, dezembro de 1989

Responsáveis: Derek Hacon e Laura Martignon

Novos Problemas Propostos

Problema 24: Ache o espectro de

$$\begin{pmatrix} 1 & n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & n-2 & & & \vdots \\ 0 & 2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Proposto por Nicolau Saldanha da PUC/RJ)

Problema 25: Que salada, Georginho deixou cair a cola no chão!
Ajude Georginho a rearrumar as doze equações!
Aliás, você poderia sugerir interpretações físicas para as equações?

$\iint_S \mathrm{rot}F \cdot \vec{n}\, dS$ $\quad$ $\int_{\partial S} F \times \vec{t}\, dr$ $\quad$ $\int_{\partial A} F \cdot \vec{t}\, dr$ $\quad$ $\iint_S \mathrm{div}F\, \vec{n}\, dS$

$=$ $\quad$ $=$

$\int_{\partial S} f\, \vec{t}\, dr$ $\quad$ $\int_{\partial S} F \cdot \vec{t}\, dr$

$\iint_A *\mathrm{grad} f\, dA$ $\quad$ $-\iint_S \mathrm{grad} f \times \vec{n}\, dS$

$\iint_A \mathrm{rot}F\, dA$ $\quad$ $\iiint_V \mathrm{div}F\, dV$

$\int_{\partial A} F \wedge \vec{t}\, dr$

$=$ $\quad$ $=$ $\quad$ $=$

$\int_{\partial A} f\, \vec{n}\, dr$ $\quad$ $\iint_{\partial V} F \times \vec{n}\, dS$ $\quad$ $\iiint_V \mathrm{grad} f\, dV$

$\int_{\partial A} F \wedge \vec{n}\, dr$ $\quad$ $\int_{\partial A} f\, \vec{t}\, dr$ $\quad$ $=$ $\quad$ $-\iint_A \mathrm{rot}F\, dA$

$=$ $\quad$ $\iint_{\partial V} F \cdot \vec{n}\, dS$ $\quad$ $=$

$-\iiint_V \mathrm{rot}F\, dV$ $\quad$ $\iint_A \mathrm{grad} f\, dA$ $\quad$ $\iint_A \mathrm{div}F\, dA$

$=$ $\quad$ $=$ $\quad$ $=$

$\int_{\partial A} F \cdot \vec{n}\, dr$ $\quad = \quad$ $\iint_A \mathrm{div}F\, dA$ $\quad$ $\iint_{\partial V} f\, \vec{n}\, dS$

(Proposto por Carlos Tomei, Nicolau Saldanha da PUC/RJ)

Soluções de Problemas Anteriores

Problema 20 (Matemática Universitária nº 8).

Sejam $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ e $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ onde para cada i $1 \leq i \leq n$ α_i e β_i são números reais estritamente positivos. Então:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta} \leq \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|^{|\beta|}$$

onde

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)^{\beta_i} \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \quad |\beta| = \sum_{i=1}^{n} \beta_i.$$

Solução (Zoárd Antal László Geöcze – UFV-DMA)

A afirmação é equivalente ao seguinte:

Sejam $(x_1, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ x_i, y_i todos positivos tal que

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1.$$

Então

$$x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \ldots x_n^{y_n} \leq y_1^{y_1} y_2^{y_2} \ldots y_n^{y_n}$$

e a igualdade vale $\Leftrightarrow$ $x_i = y_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

Prova: Procuremos o máximo de

$$f(x_1, x_2 + \cdots + x_n) = x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \ldots x_n^{y_n}$$

com as condições

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n = 1.$$

Como $f(x_1, \dots, x_n)$ é positiva, e a função $\log x$ é injetora, basta procurar o máximo de $\log f(x_1, \dots, x_n)$. Pelo teorema de Lagrange, temos que

$$\frac{y_i}{x_i} = \lambda \quad \text{(multiplicador de Lagrange)}$$

de onde $x_i = y_i$ no caso do máximo o que é alcançado no interior do compacto

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad \text{e} \quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0.$$

sendo que nas fronteiras $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Assim nas condições enunciadas

$$x_1^{y_1} \cdot x_2^{y_2} \dots x_n^{y_n} \leq y_1^{y_1} y_2^{y_2} \dots y_n^{y_n}.$$

Segunda Solução (Fernando Torres Orihuela – IMPA)

Seja $|\alpha| = |\beta| = 1$ temos

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)^{\beta_i} \leq 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_i \log\left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right) \leq 0.$$

Considere $f(x) = x \log x - s + 1 \Rightarrow f'(x) = \log x$, isto $\forall\, x > 0$.
Temos que $\quad 0 < x \leq 1 \Rightarrow \log x \leq 0 \Rightarrow f(x) \geq (1) = 0$.
portanto $\forall\, x > 0,\ \log x \geq x - 1$.
Seja

$$x = \frac{\beta_i}{\alpha_i} > 0 \Rightarrow \frac{\beta_i}{\alpha_i} \log\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) \geq \frac{\beta_i - \alpha_i}{\alpha_i}$$
$$\Leftrightarrow \beta_i \log\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) \geq \beta_i - \alpha_i.$$

Somando:

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \log\left(\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \beta_i - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 - 1 = 0$$

ou seja

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \log \frac{\alpha_i}{\beta_i} \leq 0$$

o que prova o primeiro caso.
Em geral se $|\alpha| \neq 1 \vee |\beta| \neq 1$, como $\forall i \ \alpha_i > 0 \wedge \beta_i > 0 \ |\alpha| > 0 \wedge |\beta| > 0$ consideramos

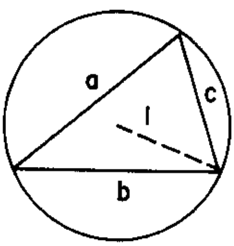
$$a = \frac{\alpha}{|\alpha|} = \left(\frac{\alpha_i}{|\alpha|}, \ldots, \frac{\alpha_n}{|\alpha|}\right) \qquad b = \frac{\beta}{|\beta|} = \left(\frac{\beta_i}{|\beta|}, \ldots, \frac{\beta_n}{|\beta|}\right)$$

logo $|a| = 1 = |b|$ então

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\frac{\alpha_i}{|\alpha|}}{\frac{\beta_i}{|\beta|}}\right)^{\frac{\beta_i}{|\beta|}} \leq 1 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{|\beta|}{|\alpha|}\right)^{\beta_i} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)^{\beta_i} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha_i}{\beta_i}\right)^{\beta_i} \leq \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^{|\beta|}.$$

Problema 8. Dado $p > 0$, determine o triângulo inscrito no círculo unitário tal que a soma das p-ésimas potências dos comprimentos dos lados seja máxima.



$$a^p + b^p + c^p = \text{máximo}$$

(Proposto por Daniel Henry, IME-USP.)

Solução (Derek Hacon, PUC/RJ)

Podemos tomar diâmetro um. Usando a regra do coseno temos

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \pm 2ab\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-b^2}$$

(dado a, b existem, em geral, duas possibilidades para c).

Escrevendo $A = a^2$, $B = b^2$, $C = c^2$, $x = p/2$ temos

$$C = A + B - 2AB \pm 2\sqrt{AB(1-A)(1-B)}$$
$$S = A^x + B^x + C^x.$$

Temos três casos

(1) $0 < A, B, C < 1$.
(2) Pelo menos um dos A, B, C é zero.
(3) Pelo menos um dos A, B, C é um.

Em (2), se $A = 0$ então $B = C$ é $\max(S) = 2$.
Em (3), se $A = 1$ então $B + C = 1$ e $\max(S) = \max\left(2,\, 1 + \frac{2}{2^x}\right)$
Finalmente o caso (1). Temos $f = 0$ onde $f = A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC - 2BC + 4ABC$. Para um máximo é necessário que $\nabla f \propto \nabla S$ (Lagrange), $\propto$ significando "é um múltiplo escalar de". Temos

$$(A - B - C + 2BC, \frac{\partial f}{\partial B}, \frac{\partial f}{\partial C}) \propto (A^{x-1}, B^{x-1}, C^{x-1})$$

isto é

$$\Big(A^2 + B^2 + C^2 + 4B^2C^2 - 2AB - 2AC + 2BC + 4ABC$$
$$-4B^2C - 4BC^2, \left(\frac{\partial f}{\partial B}\right)^2, \left(\frac{\partial f}{\partial C}\right)^2\Big)$$
$$\propto (A^{2x-2}, B^{2x-2}, C^{2x-2})$$

isto é, (usando a relação $f = 0$)

$$(BC(B-1)(C-1), AC(A-1)(C-1), AB(A-1)(B-1))$$
$$\propto (A^{2x-2}, B^{2x-2}, C^{2x-2})$$

isto é

$$\left(\frac{1}{1-A}, \frac{1}{1-B}, \frac{1}{1-C}\right) \propto (A^{2x-1}, B^{2x-1}, C^{2x-1}).$$

Então $A^{2x} - B^{2x} = A^{2x-1} - B^{2x-1}$ etc. Como $A^x - B^x$ é uma função monótona, temos $A = B$ e $B = C$. Então $\max(S) = \max\left(2, 1 + \frac{2}{2x}, 3(\frac{3}{4})^x\right)$ e um cálculo simples mostra que isto é $\max\left(2,\, 3(\frac{3}{4})^x\right)$.