Matemática e Computação

Matemática Universitária Nº 11, junho de 1990

Responsáveis: Geovan T. dos Santos e Jonas de M. Gomes

Editorial

No fim da primeira guerra mundial apareceram três artigos dos matemáticos Fatou [4], Julia [7] e Hausdorff [6], que 70 anos depois proporcionariam uma revolução em Matemática pura e aplicada. A história que se passou nesse meio tempo é característica de como o desenvolvimento matemático é, às vezes, irregular, mesmo caótico, diríamos, o que foge à idéia do todo harmonioso, fechado em si mesmo, que os livros adotados como textos escolares parecem nos transmitir.

O que Fatou e Julia estudavam era o comportamento das sucessivas compostas de uma função racional (o quociente de dois polinômios complexos) consigo mesma, isto é, as propriedades do conjunto invariante de tal função (chamado conjunto de Julia) e do seu complementar. Em linguagem atual, o que eles iniciaram foi o estudo da dinâmica das funções racionais.

Aparentemente, exceto por poucos artigos dessa mesma época, o assunto ficou no limbo por 40 anos até o trabalho de Myrberg [9] no começo da década de 60. Novamente o assunto ficou fora de foco por quase duas décadas quando, no fim dos anos 70, Mandelbrot [8] começou a fazer experimentos computacionais com polinômios quadráticos complexos e exibir os resultados com os recursos de Computação Gráfica.

Como a dimensão de Hausdorff dos conujuntos que aparecem nesse estudo é em geral um número fracionário, ele cunhou o nome "conjuntos fractais".

Em 1980 Mandelbrot teve a idéia de procurar fazer um dicionário do conjunto de Julia no caso de funções quadráticas com um parâmetro variável, ou seja, cada valor do parâmetro era catalogado no plano complexo se o conjunto de Julia fosse conexo. As figuras que daí emergem são de uma beleza impressionante e o resultado é hoje conhecido como o conjunto de Mandelbrot e é parte integrante do estudo da dinâmica das funções racionais.

Paralelamente ao trabalho de Mandelbrot, vários matemáticos retomaram o assunto. Atualmente essa é uma área onde se pode pesquisar tanto do ponto de vista etórico quanto se pode usar o computador, em especial Computação Gráfica, como uma ferramenta de pesquisa. Do ponto de vista teórico salientamos o trabalho de D. Sullivan, Douady, J. Milnor etc., e de vários matemáticos brasileiros entre os quais podemos destacar C. Camacho, R. Mañé e P. Sad, todos do Instituto de Matemática Pura e Aplicada, e, usando o computador como uma ferramenta, o trabalho de Douady-Hubbard. Uma leitura introdutória interessante sobre o assunto é o livro de James Gleick, "Chaos", que foi recentemente traduzido para o português ([5]). Outros textos introdutórios, porém com um tratamento matemático do assunto, são [**2**], [**12**] e [**3**].

Vários textos recentes exploram o lado computacional dos objetos fractais. A escola de Bremen liderada por Peigen produziu dois livros [**10**] e [**11**], o primeiro leva as idéias de Mandelbrot em termos de visualização as últimas conseqüências e o segundo é uma coletânea de artigos de vários autores que expõem algoritmos para o estudo de vários tipos de fractais.

Se por um lado há quem considere que o trabalho de Mandelbrot não é relevante do ponto de vista Matemático, por outro lado é inegável que ele desempenhou um papel importante na área de Computação Gráfica, tendo sido o responsável pela introdução de uma série de algoritmos que estabeleceram definitivamente a área de Modelagem de Fenômenos Naturais.

Dentro dessa linha, Michael Barnsley, do Georgia Technology Institute, estudou a geração de imagens como conjunto limite do que ele chama de *Sistema Iterado de Funções* (SIF). Além de diversas aplicações na Modelagem de fenômenos naturais, esse método tem encontrado aplicações na compactificação de arquivos de imagens. O texto elementar, com uma boa introdução à matemática necessária para explorar essas aplicações é o livro recente de M. Barnsley ([1]). O segundo artigo da seção Matemática e Computação neste número, escrito por Gonzalo Contreras (aluno de doutorado do IMPA), é sobre esse assunto. Esse artigo faz um breve e rigoroso survey sobre os SIF, e demonstra alguns resultados que são apenas enunciados em [1].

Como última observação lembramos que os fractais foram, provavelmente, o primeiro ente matemático a ser usado num filme comercial. As montanhas na seqüência de descrição do "Projeto Genesis" no filme Jornada nas Estrelas II (Star Track II) são modeladas utilizando técnicas de fractais.

BIBLIOGRAFIA

1. M. Barnsley, "Fractals Everywhere," Academic Press, 1988.
2. P. Blanchard, *Complex Analytic Dynamics on the Riemann Sphere*, Bull. of the Amer. Math. Soc. **11** (1984), 85–141.
3. R. L. Devaney, "An introduction to chaotic dynamical systems," Benjamin, 1986.
4. P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles*, Bull. Soc. Math. de France **47** (1919), 161–270.
5. J. Gleick, "Caos," Editora Campus, 1989.
6. F. Hausdorff, *Dimension un äusseres Mass*, Math. Annalen **79** (1919), 157–179.
7. G. Julia, *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationnelles*, J. de Math. Pures e Appl. **8** (1918), 47–245.
8. B. Mandelbrot, "The Fractal Geometry of Nature," Freeman, 1982.
9. P. Myrberg, *Sur l'itération de polynômes réels quadratiques*, J. Math. Pures et Appl. **41** (9) (1962), 339–351.
10. H.-O. Peitgen; P.H. Richter, "The Beauty of Fractals," Springer-Verlag, 1986.
11. H.-O. Peitgen; D. Saupe, "The Science of Fractal Images," Springer-Verlag, 1988.
12. P. Sad, "Introdução à dinâmica das funções racionais na esfera de Riemann," IMPA, Rio de Janeiro, 1983.