Problemas e Soluções

Matemática Universitária Nº 11, junho de 1990

Responsáveis: Derek Hacon e Laura Martignon

Novos Problemas Propostos

Problema 26: Seja k um campo algebricamente fechado de característica zero. Seja $F: k^n \to k^n$ polinomial, isto é: $\forall n \in \mathbf{Z}^+$ e existam $f_1, \ldots, f_n \in k[X_1, \ldots, X_n]$ polinômios em n-indeterminadas tais que os f_i são as funções coordenadas de F.

Se F é injetivo, provar que a matriz Jacobiana de $F \equiv J(F) := \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\right)_{n \times n}$ tem determinante constante não nulo.

($\frac{\partial f_i}{\partial X_j}$ é a derivada parcial formal de f_i respeito de X_j).

A proposição recíproca é a Conjectura do Jacobiano!

(Proposto por Fernando Torres Orihuela do IMPA).

Problema 27: Seja $f: [-1, 1] \to \mathbf{R}$ contínua. Defina

$$\Delta_k(f) = \sup \frac{\|f(A) - f(B)\|}{\|A - B\|}$$

onde A, B percorrem o conjunto das matrizes auto-adjuntas $k \times k$ sobre $\mathbf{C}$ com norma (operador) ≤ 1.

Relacionar $\Delta_k(f)$ com a constante de Lipschitz de f.

Em particular, se $\Delta_1(f) < \infty$ será que $\sup\limits_{k \geq 1} \Delta_k(f) < \infty$?

(Proposto por Ruy Exel IME-USP).

Soluções de Problemas Anteriores

Problema 22: Seja E o espaço das funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbf{R}$ que se anulam na origem, com a norma do supremo. Considere o subconjunto K de E formado pelas funções Lipschitzianas com constante de Lipschitz ≤ 1. K é compacto e convexo. Determine seus pontos extremos.

(Proposto por Ruy Exel – IME-USP)

Solução (J. Angulo, D. Rial, F. Torres – IMPA).

Seja $\text{Ext}(K)$ o conjunto de pontos extremos de K. No que segue os conceitos da teoria da medida são em relação à medida de Lebesgue em $[0,1]$.

O nosso propósito é provar que: $f \in \text{Ext}(K) \Leftrightarrow (f \in K \wedge$ (para q.t.p. $t \in [0,1]$, $|f'(t)| = 1))$.

Afirmação 1: K compacto e convexo $\Rightarrow \text{Ext}(K) \neq 0 \wedge \text{Ext}(K) \subseteq K$.

Prova: Corolário do Teorema de Krein-Milman (ver, por exemplo, o Teorema 7.5, Cap. 7 em **[1]** ou Teorema 4.4.1 Cap. II em **[2]**).

Seja $L^\infty := \{f: [0,1] \to \mathbf{R} \mid f$ mensurável $\wedge \exists c > 0$, tal que para q.t.p. $\in [0,1]$ temos $|f(t)| \leq c\}$.

Para $f \in L^\infty$, $\|f\|_{L^\infty} := \inf\{c > 0 \mid \exists c > 0$ para q.t.p. $t \in [0,1]$ $|f(t)| \leq c\}$.

Temos que L^∞ é um Espaço Vetorial Normado com Norma $\| \ \|_{L^\infty}$.

Afirmação 2: $f \in K \Leftrightarrow (\exists f' \in L^\infty, \|f'\|_{L^\infty} \leq 1,\ f(x) = \int_0^x f'(t)dt, x \in [0,1])$.

Prova: $(\Leftarrow)$ É claro.

($\Rightarrow$) $f \in K \Rightarrow f$ é absolutamente contínua (ver pág. 332 em [3]).

$\Rightarrow f$ é de variação limitada (ver pág. 333 em [3]).

$\Rightarrow \exists v, g$ absolutamente contínuas crescentes com $f = v - g$ (ver propriedade 4 na pág. 334 em [3]).

$\Rightarrow$ Para q.t.p. $t \in [0,1]$ $\exists f'(t)$. (Um Teorema de Lebesgue; Teorema 1 pág. 314 em [3]).

$\Rightarrow \|f'\|_{L^\infty} \leq 1 \wedge f(x) = \int_0^x f'(t)dt$. (Isto é conseqüência de outro Teorema de Lebesgue; Teorema 3 pág. 335 em [3]). ∎

Pela Afirmação 1 basta provar:

$$(*) \qquad f \in \text{Ext}(K) \Leftrightarrow \text{ para q.t.p. } t \in [0,1] \ |f'(t)| = 1.$$

Prova de (*):

($\Rightarrow$) Suponha que existe $V := \{t \in [0,1] : |f'(t)| < 1\}$ tal que $\mu(V) > 0$.

Para $n \in \mathbf{Z}^+ \setminus \{1\} : V_n := \{t \in [0,1] \ |f'(t)| < 1 - \frac{1}{n}\}$

$$\Rightarrow \quad V = \bigcup_{n \geq 2} V_n.$$

$\mu(V) > 0 \Rightarrow \exists n_o \in \mathbf{Z}^+ \setminus \{1\}$ com $\mu(V_{n_o}) > 0$.

Sejam X_o a função característica de V_{n_o} em $[0,1]$,

$$g(x) := \int_0^x (f'(x) + \frac{1}{n_o} X_o(x))dx, \ h(x) := \int_0^x (f'(x) - \frac{1}{n_o} X_o(x))dx$$

para $x \in [0,1]$. Então $f = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2}h$, claramente $g \neq h$ e pela Afirmação 2 $g, h \in K$. Logo $f \notin \text{Ext}(K)$.

($\Leftarrow$) Seja $M := \{f : [0,1] \to \mathbf{R} \mid f' \in L^\infty, f(x) = \int_0^x f'(t)dt, x \in [0,1]\}$. Então M é um Espaço Normado Completo com $\|f\| := \|f'\|_{L^\infty}$.

Pela Afirmação 2 temos que $K \subseteq M$ e como subconjunto de M, K é compacto. Além do mais a convexidade não se destrói pois E e M são subespaços vetoriais de $C^o([0,1], \mathbf{R})$.

Agora usamos (**): "Sejam M, K como antes, $\mathcal{V} \in L(M, \mathbf{R})$ funcional linear e contínua, $m = \max\{\mathcal{V}(x) : x \in K\}$, $A := \{x \in K : \mathcal{V}(x) = m\}$; então A é compacto e extremal de K"; (ver Proposição b) pág, 136 em [2]).

Seja $V^+ := \{t \in [0,1] : f'(t) = 1\}$, $V' := \{t \in [0,1] : f'(t) = -1\} \Rightarrow \mu(V^+ \cup V') = 1$. Aqui f satisfaz a hipótese, ou seja, $f \in K \wedge$ para q.t.p. $t \in [0,1], |f'(t)| = 1$.
Definamos

$$\mathcal{V}_f : M \to \mathbf{R}$$
$$g \mapsto \int_{V+} g'd\mu - \int_{V-} g'd\mu.$$

Então $\mathcal{V}_f$ é funcional linear contínua, $\forall g \in K : |\mathcal{V}_f(g)| \leq 1$, $\mathcal{V}_f(f) = 1$. Logo usando (**) $f \in \mathrm{Ext}(K)$. ∎

BIBLIOGRAFIA

1. E. Bishop, D. Bridges, "Constructive Analysis," Springer-Verlag, 1985.
2. M. Cotlar, R. Cignoli, "An Introduction to Functional Analysis," North-Holland, 1974.
3. A. Kolmogorov, S. Fomin, "Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional," MIR, 1982.

Problema 24: Ache o espectro de

$$\begin{pmatrix} 1 & n-1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & n-2 & & & \vdots \\ 0 & 2 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n-1 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposto por Nicolau Saldanha - PUC/RJ)

Solução (Fernando Torres Orihuela - IMPA)

Se Σ_n é o espectro $\Rightarrow$:

$n = 2k \geq 4 \qquad \Sigma_n = \{0, 2, -2, 4, \ldots, 2k-2-(2k-2), 2k\}$

$n = 2k+1 \geq 3 \quad \Sigma_n = \{1, -1, 3, \ldots, 2k-1, -(2k-1), 2k+1\}$.

Prova:

Seja

$$A_n = \begin{bmatrix} 1 & n-1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & n-1 & 1 \end{bmatrix} \quad P_n(\lambda) = \det(A_n - \lambda I_n),\ n \geq 3.$$

Pondo $x = 1 - \lambda$ vemos que $q_n(x) = p_n(1-x) = \det(B_n)$ donde

$$B_n = \begin{bmatrix} x & n-1 & & & \\ 1 & x & n-2 & & \\ & 2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & n-1 & x \end{bmatrix}$$

A transformamos somando a cada coluna as colunas que a seguem (salvo claro a última da esquerda para a direita), ou seja

$$B_n \sim \begin{bmatrix} x+(n-1) & (n-1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x+(n-1) & x+(n-2) & (n-2) & \cdots & \vdots & \vdots \\ x+(n-1) & x+(n-1) & x+(n-1) & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & x+(n-1) & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x+1 & 1 \\ x+(n-1) & x+(n-1) & x+(n-1) & \cdots & x+(n-1) & x \end{bmatrix}$$

Agora começando pela 1ª fila a cada fila resta-se a que a segue, salvo claro a última, ou seja

$$B_n \sim \begin{bmatrix} 0 & -x+1 & -(n-2) & \cdots & & \\ 0 & -1 & -x+1 & \cdots & & \\ \vdots & & & & & \\ & & & & -(n-2) & -x+1 \\ x+(n-1) & x+(n-1) & \cdots & \cdots & x+(n-1) & x \end{bmatrix}$$

ou seja

$$B_n \sim \left.\begin{bmatrix} 0 & x-1 & (n-2) & & \bigcirc \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \bigcirc & \ddots & 1 \\ \vdots & & & (n-2) & x-1 \\ x+(n-1) & x+(n-1) & \cdots & x+(n-1) & x \end{bmatrix}\right\} (n-1)\times(n-1).$$

Assim

$$q_n(x) = (-1)^{n+1}[x + (n-1)]q_{n-1}(x-1) \quad \text{para} \quad n \geq 4 \qquad (*)$$

o qual nos permite aplicar indução afirmando que:

$$\text{Se } n = 2k+1 \geq 3 \Rightarrow \underbrace{\text{raízes de } q_n(s)}_{\mathcal{R}_n} = \{0, -2, 2, \ldots, -2k, 2k\}$$

$$\text{Se } n = 2k \geq 4 \Rightarrow \overbrace{\text{raízes de } q_n(x)}^{\mathcal{R}_n} = \{-1, 1, -3, 3, \ldots, -(2k-1), (2k-1)\}$$

Com efeito, se:

$$n = 3, \ q_3(x) = \det \begin{bmatrix} 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 1 & x-1 \\ x+2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(x+2)\left[(x-1)^2 - 1\right]$$

$$\Rightarrow \mathcal{R}_3 = \{0, -2, 2\}.$$

Assim suponhamos certo para $n \geq 3$, e provemos para $n+1$.
Pela fórmula (*) $q_{n+1}(x) = (-1)^{n+2}[x+n]q_n(x-1)$.
Se $n+1 = 2k \Rightarrow n = 2k-1$.

Por hipótese indutiva: $\mathcal{R}_{2k-1} = \{0, -2, 2, \ldots, -2(k-1), 2(k-1)\}$ assim as raízes de $q_n(x-1)$ são: $\{1, -1, 3, \ldots, -(2k-3), 2k-1\}$ e pelo fator da fórmula (*):

$$\mathcal{R}_{2k=n+1} = \{-1, 1, -3, 3, \ldots, -(2k-1), (2k+1)\}.$$

Se $n+1 = 2k+1$ procede-se em forma similar.

Segunda Solução (Derek Hacon - PUC/RJ)

Ache o espectro de

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & & & \bigcirc \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \bigcirc & & & k & 0 \end{pmatrix}$$

Seja D a diferenciação no espaço de polinômios de grau $\leq k$. Então A é a matriz de $kx\,I + (1 - x^2)D$. Os autovetores f são dados pela equação

$$kxf + (1 - x^2)Df = \lambda f \qquad (\lambda \text{ constante})$$

ou seja $\frac{Df}{f} = \frac{1}{2}\left\{\frac{k+\lambda}{x+1} + \frac{k-\lambda}{x-1}\right\}$.

De fato $(x+1)^k, (x+1)^{k-1}(x-1), \ldots, (x-1)^k$ são autovetores, correspondendo a autovalores $k, k-2, \ldots, -k$, como estes são distintos, o espectro de A é $\{k, k-2, \ldots, -k\}$.