

# Os trabalhos de Leopoldo Nachbin (1922-1993)

Jorge Mujica

Leopoldo Nachbin faleceu no Rio de Janeiro no dia 3 de abril de 1993. Não é fácil descrever em poucas páginas as muitas contribuições de Nachbin como matemático. Felizmente o leitor interessado pode consultar a análise detalhada que John Horváth {15} fez em seu artigo "The life and works of Leopoldo Nachbin". De fato, para redigir este artigo utilizei o artigo do Horváth {15}, assim como também artigos de diversos autores {1}, {17}, {19}, {21}. Neste artigo nos limitaremos a apresentar uma biografia de Nachbin, seguida de resenhas de seus trabalhos mais importantes.

## Biografia de Leopoldo Nachbin

Leopoldo Nachbin nasceu em Recife, Pernambuco, no dia 7 de janeiro de 1922. Era filho de Jacob Nachbin e Léa Drechsler Nachbin.

Em 1932 Nachbin iniciou seus estudos secundários no Ginásio Pernambucano. Como teve sérias dificuldades com a matemática logo no seu primeiro ano no ginásio, Nachbin teve que se esforçar especialmente no estudo da disciplina, e dessa maneira tornou-se um dos alunos mais destacados. Estimulado por seu professor de matemática, Luiz Ribeiro, Nachbin leu vários trabalhos de matemáticos famosos, que se encontravam na biblioteca do Ginásio Pernambucano como doações do governo da França.

Em 1939 Nachbin ingressou na Escola Nacional de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), então chamada Universidade do Brasil. Obteve o diploma de engenheiro civil em 1943, e tornou-se Professor Assistente da Escola Nacional de Engenharia em 1944.

A partir de 1940, e simultaneamente com o curso de Engenharia, Nachbin frequentou as aulas do curso de Bacharelado em Matemática da Faculdade Nacional de Filosofia da UFRJ, mas de modo informal, como aluno ouvinte, pois não era permitido estar matriculado em dois cursos na mesma universidade. Em

1947 Nachbin foi contratado como Professor Regente na Faculdade Nacional de Filosofia.

Desde sua juventude Nachbin revelou um interesse espontâneo pela análise matemática, mas seu interesse em outras áreas da matemática foi estimulado por seus contatos com vários matemáticos estrangeiros que estiveram no Brasil por períodos variáveis na década de 1940. O primeiro deles foi o matemático italiano Gabrielle Mammana, professor na Faculdade Nacional de Filosofia de 1939 a 1942, que patrocinou o primeiro trabalho de Nachbin, publicado nos Anais da Academia Brasileira de Ciências em 1941, quando tinha apenas dezenove anos de idade. Nachbin foi também fortemente influenciado pelo matemático português Antônio Monteiro, que foi professor na Faculdade Nacional de Filosofia de 1945 a 1949. Sob a influência de Monteiro, Nachbin se interessou pelo estudo de conjuntos ordenados, reticulados e álgebras de Boole. Sob a influência do matemático norte-americano Marshall Stone, professor visitante na Faculdade Nacional de Filosofia em 1947, Nachbin passou a se interessar pela teoria da aproximação. Finalmente, o interesse de Nachbin pelos espaços uniformes e pelos espaços vetoriais topológicos, assim como seu estilo matemático, foram muito influenciados pelos seus contatos freqüentes com os matemáticos franceses André Weil e Jean Diedonné, fundadores do grupo Bourbaki, que estiveram na Universidade de São Paulo entre 1945 e 1947.

Nachbin viajou pela primeira vez aos Estados Unidos em 1948, passando dois anos na Universidade de Chicago, onde Marshall Stone era então chefe do Departamento de Matemática. Teve uma bolsa do Departamento de Estado dos Estados Unidos durante o primeiro ano, e uma bolsa da Fundação Guggenheim durante o segundo ano. Em 1949 Nachbin publicou sua caracterização de subálgebras densas de funções diferenciáveis, e em 1950 publicou seu teorema de Hahn-Banach com valores vetoriais. Foi também em 1950 que Nachbin apresentou seu livro "Topologia e Ordem", publicado em português pela editora da Universidade de Chicago, para o concurso da cátedra de análise matemática na Faculdade Nacional de Filosofia. Mas havia oposição à participação de Nachbin no concurso por parte de algumas pessoas sob o pretexto que ele não tinha o grau de bacharel em matemática. Como resultado disso, a realização do concurso foi adiada, e Nachbin teve que esperar até 1972 para se tornar Professor Titular da UFRJ.

Ao regressar de Chicago em 1950 Nachbin tornou-se Professor Titular do Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (CBPF), que tinha sido fundado em 1949, sob a iniciativa de César Lattes, como uma sociedade civil, sendo o próprio Nachbin um dos sócios fundadores. Nachbin foi também um dos principais idealizadores da criação do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), fundado em 1952 como órgão do Conselho Nacional de Pesquisas (CNPq). Nachbin permaneceu no IMPA como Professor Titular até 1971, quando de lá se

afastou para regressar à UFRJ. Em 1954 Nachbin publicou sua notável caracterização de espaços tonelados ou bornológicos de funções contínuas, caracterização obtida simultânea e independentemente por Shirota.

Em 1956 Nachbin casou-se com Maria da Graça Moura Mousinho. Leopoldo e Graça tiveram três filhos: André, Léa e Luiz, nascidos respectivamente em Chicago, Rio de Janeiro e Rochester, três das cidades mais significativas na carreira de Leopoldo. Logo após seu casamento, Nachbin viajou de novo aos Estados Unidos, passando um ano na Universidade de Chicago e um ano no Instituto de Estudos Avançados em Princeton. Ele teve uma bolsa da Fundação Rockefeller durante o primeiro ano e uma bolsa da Fundação Guggenheim durante o segundo ano.

Em 1961 Nachbin viajou de novo ao exterior, passando o período 1961-1963 na Universidade de Paris, a convite de Laurent Schwartz, e o período de 1963-1965 na Universidade de Rochester. Foi um dos conferencistas convidados no Congresso Internacional de Matemáticos realizado em Estocolmo em 1962. Ainda em 1962 ganhou o Prêmio Moinho Santista, que esse ano fora concedido pela Fundação Moinho Santista, de São Paulo, pela primeira vez na área de matemática. Seu livro "Topologia e Ordem", já mencionado, foi traduzido ao inglês e publicado pela editora Van Nostrand em 1965. Seu livro "Integral de Haar", baseado em cursos ministrados no Rio de Janeiro e Recife em 1959, foi também traduzido em inglês e publicado pela editora Van Nostrand em 1965. Seu livro "Lectures on the Theory of Distributions", publicado pela Universidade do Recife em 1964, reproduziu as notas mimeografadas de um curso ministrado na Universidade de Rochester em 1963. Esse curso marcou o início do interesse de Nachbin pelo estudo das funções analíticas entre espaços de Banach, e a partir de então, a maior parte do seu trabalho de pesquisa apontaria nessa direção.

O livro "Elements of Approximation Theory", publicado pela editora Van Nostrand em 1967, reproduziu as notas mimeografadas de um curso ministrado por Nachbin na Universidade de Paris em 1962 e na Universidade de Rochester em 1964. Em 1967 Nachbin tornou-se "George Eastman Professor of Mathematics" na Universidade de Rochester. Essa cadeira foi criada especialmente para Nachbin, honrando a memória de George Eastman, o fundador da Kodak, companhia que nasceu e se desenvolveu em Rochester, e muito tem ajudado a Universidade de Rochester. A partir de 1967 e até a sua aposentadoria em 1991, com poucas exceções, Nachbin passou o semestre do outono norte-americano de cada ano acadêmico em Rochester, e o resto do ano no Rio de Janeiro.

Como mencionamos anteriormente, Nachbin afastou-se do IMPA em 1971, e regressou à UFRJ, onde permaneceu até a sua aposentadoria em 1982. Regressou então em tempo integral ao CBPF, ao qual estava ligado desde seu regresso de Chicago em 1950.

Nachbin recebeu numerosos prêmios e honrarias. Além do Prêmio Moinho

Santista, já mencionado, devemos destacar o Prêmio Bernardo Houssay, concedido a Nachbin pela Organização dos Estados Americanos em 1982. Foi essa a primeira vez que tal prêmio fora concedido na área de matemática.

Ao longo de sua carreira Nachbin desenvolveu um intenso trabalho como professor e orientador de numerosos alunos de diversos países. Mais ainda, através de seus contatos com a comunidade matemática internacional, Nachbin encaminhou dezenas de jovens brasileiros às melhores universidades no exterior, para que ali se doutorassem e se beneficiassem do bom ambiente científico reinante. Seu trabalho editorial foi também impressionante. A conhecida série "Notas de Matemática", publicada pela editora North-Holland desde 1973, é a melhor amostra do seu trabalho editorial e trará seu nome à memória de todos aqueles que examinarem os volumes da série.

A seguir faremos uma resenha dos trabalhos mais relevantes de Nachbin.

### Aproximação de Funções Diferenciáveis

O teorema de aproximação de Weierstrass [28] afirma que *toda função*  $f \in C[a,b]$  *pode ser uniformemente aproximada por polinômios*. Como se sabe, esse teorema foi generalizado por Stone [25] da maneira seguinte. *Seja*  $X$  *um espaço de Hausdorff completamente regular, e consideremos*  $C(X)$  *munido da topologia compacto-aberta. Então uma subálgebra*  $A$  *de*  $C(X)$  *é densa em*  $C(X)$  *se e só se verificam-se as condições seguintes: (a) dados*  $x \neq y$  *em*  $X$ , *existe*  $f \in A$  *tal que*  $f(x) \neq f(y)$ ; *(b) dado*  $x \in X$ , *existe*  $f \in A$  *tal que*  $f(x) \neq 0$ . Este teorema é conhecido como teorema de Stone-Weierstrass. No seu primeiro trabalho em teoria da aproximação, Nachbin [19] obteve o seguinte resultado análogo no caso de funções diferenciáveis.

**Teorema.** *Seja*  $U$  *um aberto em*  $\mathbb{R}^n$ , *e seja*  $C^k(U)$  *a álgebra de todas as funções de classe*  $C^k$  *de*  $U$  *em*  $\mathbb{R}$ , *munida da topologia da convergência uniforme sobre os compactos de*  $U$  *das funções e suas derivadas parciais até a ordem*  $k$ . *Então uma subálgebra*  $A$  *de*  $C^k(U)$  *é densa em*  $C^k(U)$  *se e só se verificam-se as condições seguintes:*

- (a) *dados*  $x \neq y$  *em*  $U$ , *existe*  $f \in A$  *tal que*  $f(x) \neq f(y)$ ;
- (b) *dado*  $x \in U$ , *existe*  $f \in A$  *tal que*  $f(x) \neq 0$ ;
- (c) *dado*  $x \in U$  *e*  $t \neq 0$  *em*  $\mathbb{R}^n$ , *existe*  $f \in A$  *tal que*  $\frac{\partial f}{\partial t}(x) \neq 0$ .

A versão do teorema de Stone-Weierstrass que enunciamos anteriormente caracteriza as subálgebras densas de  $C(X)$ . Existe uma outra versão, mais geral, que caracteriza a aderência de uma subálgebra  $A$  de  $C(X)$ . Esta versão do teorema

de Stone-Weierstrass afirma que para que uma função  $g \in C(X)$  pertença à aderência de  $A$  é necessário e suficiente que se verifiquem as condições seguintes: (a) dados  $x, y \in X$  tais que  $g(x) \neq g(y)$ , existe  $f \in A$  tal que  $f(x) \neq f(y)$ ; (b) dado  $x \in X$  tal que  $g(x) \neq 0$ , existe  $f \in A$  tal que  $f(x) \neq 0$ . Cabe mencionar que até hoje não se conhece uma caracterização análoga para a aderência de uma subálgebra de  $C^k(U)$ . Em 1961 Nachbin [35] formulou a seguinte conjectura, que até hoje não foi nem provada nem refutada.

**Conjetura.** *Seja  $U$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ , seja  $A$  uma subálgebra de  $C^k(U)$ , e seja  $g \in C^k(U)$ . Para que  $g$  pertença à aderência de  $A$  em  $C^k(U)$  é necessário e suficiente que, dados  $x, y \in U$ , exista  $f \in A$  tal que*

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x) = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} g}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x) \quad \text{e} \quad \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(y) = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} g}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(y)$$

sempre que  $0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq k$ .

Se esta conjectura fosse provada, então ela englobaria não apenas o teorema anterior de Nachbin, como também o seguinte teorema de Whitney [30]. *Seja  $I$  um ideal de  $C^k(U)$ , e seja  $g \in C^k(U)$ . Para que  $g$  pertença à aderência de  $I$  é necessário e suficiente que, dado  $x \in U$ , exista  $f \in A$  tal que*

$$\frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x) = \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} g}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x)$$

sempre que  $0 \leq k_1 + \dots + k_n \leq k$ .

## O Teorema de Hahn-Banach com Valores Vetoriais

Seja  $E$  um espaço de Banach sobre  $\mathbb{K}$ , e seja  $M$  um subespaço de  $E$ . O teorema de Hahn-Banach afirma que cada funcional linear contínuo  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{K}$  admite uma extensão linear contínua  $\tilde{\varphi} : E \rightarrow \mathbb{K}$ , com a mesma norma. Será que existe um resultado análogo para operadores com valores num espaço de Banach  $F$ ? O teorema seguinte, devido a Nachbin [21], Goodner [11] e Kelley [16] no caso de espaços reais, e a Hasumi [12] no caso de espaços complexos, caracteriza os espaços de Banach  $F$  com essa propriedade de extensão.

**Teorema.** *Para um espaço de Banach  $F$ , as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *Dados um espaço de Banach  $E$  e um subespaço  $M$  de  $E$ , cada operador  $T \in L(M; F)$  admite uma extensão  $\tilde{T} \in L(E; F)$  tal que  $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ .*

(b) Cada vez que  $F$  é um subespaço de um espaço de Banach  $G$ , existe uma projeção de norma um de  $G$  sobre  $F$ .

(c)  $F$  tem a propriedade da interseção binária, ou seja, uma coleção de bolas fechadas de  $F$  tem interseção não vazia sempre que cada par de bolas da coleção tenha interseção não vazia.

(d) Existe um espaço compacto de Hausdorff extremamente desconexo  $X$  tal que  $F$  é isometricamente isomorfo a  $C(X)$ .

Lembremos que um espaço topológico é dito *extremamente desconexo* se a aderência de cada subconjunto aberto é um aberto.

Em 1950 Nachbin [21] e Goodner [11] provaram, de maneira independente, a equivalência das condições (a), (b) e (c). Além disso, provaram que (d) sempre implica (c), e que (c) implica (d), desde que a bola unitária fechada de  $F$  tenha pelo menos um ponto extremal. De fato, Nachbin [21] conjecturou que se  $F$  é um espaço de Banach com a propriedade da interseção binária, então a bola unitária fechada de  $F$  tem pelo menos um ponto extremal. Em 1952 Kelley [16] conseguiu provar que (c) implica (d), sem supor a existência de pontos extremais. Mais tarde Nachbin [40] provou a sua conjectura, e mais ainda, provou que *se  $F$  é um espaço de Banach com a propriedade da interseção binária, então a bola unitária fechada de  $F$  é a envoltória convexa e fechada de seus pontos extremais*. Notemos que não é possível utilizar o teorema de Krein-Milman, com a topologia fraca, para provar a conjectura de Nachbin, pois o próprio Nachbin [21] tinha provado que *se  $F$  é um espaço de Banach reflexivo com a propriedade da interseção binária, então  $F$  tem dimensão finita*.

## Espaços de Funções Contínuas

Os espaços *repletos* foram introduzidos de maneira independente por Hewitt [13] [14], sob o nome de  *$Q$ -espaços*, e por Nachbin [22], sob o nome de espaços *saturados*, mas nós seguiremos a terminologia de Bourbaki [5]. Uma maneira simples de definir espaços repletos é a seguinte. Lembremos que um espaço de Hausdorff é compacto se e só se ele é homeomorfo a um subespaço fechado de um produto de intervalos fechados e limitados. Generalizando a noção de espaço compacto de Hausdorff, diremos que um espaço topológico é *repleto* se ele é homeomorfo a um subespaço fechado de um produto de cópias de  $\mathbb{R}$ . Um traço distintivo da noção de espaço repleto é sua relação com distintas áreas da matemática. Por exemplo, um espaço de Hausdorff completamente regular  $X$  é repleto se e só se  $X$  é completo com relação à estrutura uniforme definida por  $C(X)$ . Ou ainda, um espaço de Hausdorff completamente regular  $X$  é repleto se e só se cada funcional linear multiplicativo não trivial em  $C(X)$  é a avaliação num ponto conveniente de  $X$ . Para outras propriedades dos espaços repletos o leitor pode consultar os livros de Gillman e Jerison [10] ou Weir [29]. Gillman e Jerison

chamam os espaços repletos de espaços *real compactos*, enquanto que Weir chama os espaços repletos de *espaços de Hewitt-Nachbin*. A familiaridade de Nachbin com os espaços repletos o levou, alguns anos mais tarde, a resolver um problema proposto por Dieudonné, que descrevemos a seguir.

Um espaço localmente convexo é dito *tonelado* se cada subconjunto fechado, convexo, equilibrado e absorvente é uma vizinhança de zero. Um espaço localmente convexo é dito *bornológico* se cada subconjunto convexo e equilibrado que absorve os limitados é uma vizinhança de zero. Os espaços de Banach são exemplos de espaços tonelados, assim como os espaços normados são exemplos de espaços bornológicos. É consequência imediata do princípio de limitação uniforme que todo espaço bornológico quase-completo é tonelado, e Dieudonné {7} tinha proposto o problema de decidir se todo espaço tonelado seria necessariamente bornológico. Nachbin soube do problema durante uma visita de três meses à Universidade da Califórnia em Los Angeles, e sua familiaridade com os espaços repletos o ajudou a resolver o problema na negativa. A chave da solução é o teorema seguinte.

**Teorema.** *Seja  $X$  um espaço de Hausdorff completamente regular, e consideremos  $C(X)$  munido da topologia compacto-aberta.*

(a)  *$C(X)$  é tonelado se e só se, para cada subconjunto fechado mas não compacto  $A$  de  $X$ , existe uma função  $f \in C(X)$  que não é limitada sobre  $A$ .*

(b)  *$C(X)$  é bornológico se e só se  $X$  é repleto.*

Usando resultados de Gillman e Henriksen {9}, Nachbin mostrou a existência de espaços que verificam a condição em (a), mas não são repletos. Isso resolveu o problema de Dieudonné de maneira negativa.

O teorema anterior foi obtido ao mesmo tempo e de forma independente por Shirota {24}, e é portanto conhecido como teorema de Nachbin-Shirota. Esse teorema foi o ponto de partida de uma vasta linha de pesquisa. Duas monografias de Schmets {22} {23} expõem os resultados de vários autores nessa direção.

### Aproximação Ponderada de Funções Contínuas

Diremos que uma função  $\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um peso se  $\nu$  é positiva e semicontínua superiormente. Dado um peso  $\nu$  em  $\mathbb{R}$ , denotaremos por  $C\nu_0(\mathbb{R})$  o espaço de todas as funções  $f \in C(\mathbb{R})$  tais que  $\nu f$  tende a zero no infinito. O espaço  $C\nu_0(\mathbb{R})$  é munido da seminorma

$$\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \nu(x) |f(x)|$$

Denotemos por  $P(\mathbb{R})$  a álgebra de todos os polinômios  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Um peso  $\nu$

em  $\mathbb{R}$  é dito *fundamental* se

- (a)  $\nu$  tende a zero no infinito para todo polinômio  $p \in P(\mathbb{R})$ ;
- (b)  $P(\mathbb{R})$  é denso em  $C_{\nu_0}(\mathbb{R})$ .

O *problema de aproximação ponderada de Bernstein* [2] consiste em achar condições para que um peso  $\nu$  seja fundamental. Segue do teorema de aproximação de Weierstrass que a função característica de cada intervalo fechado e limitado é um peso fundamental. Num artigo de Mergelyan [18] aparece uma condição necessária e suficiente para que um peso seja fundamental, além de uma resenha dos resultados de vários autores.

Nachbin [48] [49] [50] generalizou o problema de aproximação de Bernstein da mesma maneira que Stone havia generalizado o problema de aproximação de Weierstrass. Em lugar de  $\mathbb{R}$  consideremos um espaço de Hausdorff completamente regular  $X$ , um peso  $\nu$  em  $X$  e o espaço correspondente  $C_{\nu_0}(X)$ . Seja  $A$  uma subálgebra de  $C(X)$  contendo a função 1, e seja  $M$  um subespaço vetorial de  $C_{\nu_0}(X)$  tal que  $AM \subset M$ . O *problema de aproximação ponderada de Bernstein-Nachbin* consiste em descrever a aderência de  $M$  em  $C_{\nu_0}(X)$ , ou em particular achar condições para que  $M$  seja denso em  $C_{\nu_0}(X)$ . Tomando  $X = \mathbb{R}$  e  $A = M = P(\mathbb{R})$ , obtemos o problema de aproximação ponderada de Bernstein.

Para estudar este problema Nachbin introduziu a seguinte relação de equivalência em  $X$ :  $x \sim y \pmod{A}$  se  $\varphi(x) = \varphi(y)$  para todo  $\varphi \in A$ . Denotemos por  $X/A$  a família de classes de equivalência. Diremos que  $M$  é *localizável* sob  $A$  se uma função  $g \in C_{\nu_0}(X)$  pertence à aderência de  $M$  em  $C_{\nu_0}(X)$  cada vez que a restrição  $g|_x$  pertence à aderência de  $M|_x$  em  $C_{\nu_0}(x)$ , para cada classe de equivalência  $x \in X/A$ . A relação entre localizabilidade e densidade é dada pela seguinte proposição.

**Proposição.** *Suponhamos que:*

- (a) dados  $x \neq y$  em  $X$ , existe  $\varphi \in A$  tal que  $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ ;
- (b) dado  $x \in X$  existe  $f \in M$  tal que  $f(x) \neq 0$ ;
- (c)  $M$  é localizável sob  $A$ .

Então  $M$  é denso em  $C_{\nu_0}(X)$ .

Nachbin [48] [49] [50] obteve vários resultados, com condições suficientes para que  $M$  fosse localizável sob  $A$ . Como amostra apresentamos o teorema seguinte.

**Teorema.** *Se cada  $\varphi \in A$  é limitada sobre o suporte de  $\nu$ , então  $M$  é localizável sob  $A$ .*

Para simplificar a exposição nós consideramos o espaço  $C_{\nu_0}(X)$ , com um



único peso  $v$ . Na verdade Nachbin [49] [40] [50] considerou, de maneira mais geral espaços  $CV_0(X)$ , sendo  $V$  uma família de pesos. Os espaços ponderados  $CV_0(X)$  tem recebido considerável atenção de vários pesquisadores. Citamos por exemplo artigos de Summers [26] [27], que estuda os espaços ponderados  $CV_0(X)$ , assim como também artigos de Bierstedt e Meise [3] [4], que estudam limites indutivos de espaços ponderados. Em [68], Nachbin e seus alunos Sílvia Machado e João B. Prolla, estudaram o problema de aproximação ponderada de funções contínuas com valores vetoriais. Diversos resultados nessa direção podem ser encontrados no livro de Prolla [20].

### Holomorfia em Dimensão Infinita

Sejam  $E$  e  $F$  espaços de Banach complexos, e seja  $U$  um aberto de  $E$ . Uma função  $f: U \rightarrow F$  é dita *holomorfa* se  $f$  é contínua e se, dados  $a \in U$ ,  $b \in E$  e  $\psi \in F'$ ,  $\psi \circ f(a + \lambda b)$  é uma função holomorfa, no sentido usual, da variável complexa  $\lambda$ , num disco com centro na origem.  $H(U;F)$  denota o espaço vetorial das funções holomorfas de  $U$  em  $F$ .

Quando  $E$  tem dimensão finita, a topologia compacto-aberta  $\tau_0$  é a topologia natural em  $H(U;F)$ , pois nesse caso  $(H(U;F), \tau_0)$  é um espaço de Fréchet. Quando  $E$  tem dimensão infinita, a topologia  $\tau_0$  é fraca demais para ser de utilidade, e há outras topologias em  $H(U;F)$  com os mesmos limitados que  $\tau_0$ . Nachbin introduziu duas topologias em  $H(U;F)$  que passaram a ter grande importância, e que descreveremos a seguir.

Uma seminorma  $p$  em  $H(U;F)$  é dita *portada* por um compacto  $K \subset U$  se, para cada aberto  $V$  com  $K \subset V \subset U$ , existe  $c > 0$  tal que  $p(f) \leq c \sup_{x \in V} \|f(x)\|$  para todo  $f \in H(U;F)$ . A topologia  $\tau_\omega$ , introduzida por Nachbin em [55] e [59], é a topologia localmente convexa definida por todas as seminormas em  $H(U;F)$  que são portadas por compactos de  $U$ .

Se  $\mathcal{A} = (U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma cobertura aberta enumerável de  $U$ , denotaremos por  $H^\infty(\mathcal{A}; F)$  o subespaço de todas as  $f \in H(U;F)$  que são limitadas sobre cada  $U_n$ . Então  $H^\infty(\mathcal{A}; F)$  é um espaço de Fréchet para a topologia da convergência uniforme sobre cada  $U_n$ , e o espaço  $H(U;F)$  é a reunião dos subespaços  $H^\infty(\mathcal{A}; F)$ , quando  $\mathcal{A}$  percorre as coberturas abertas enumeráveis de  $U$ . A topologia  $\tau_\delta$ , introduzida por Nachbin em [66], e de maneira independente por Coeuré em [6], é a topologia localmente convexa definida por todas as seminormas em  $H(U;F)$  cujas restrições a cada  $H^\infty(\mathcal{A}; F)$  são contínuas.

Sempre tem-se que  $\tau_0 \subseteq \tau_\omega \subseteq \tau_\delta$  e estas topologias definem os mesmos

limitados. De fato  $\tau_\delta$  é a topologia localmente convexa mais forte em  $H(U;F)$  com os mesmos limitados que  $\tau_0$ .

Dos numerosos trabalhos publicados por Nachbin sobre holomorfia em dimensão infinita, aqueles em que introduziu as topologias  $\tau_\omega$  e  $\tau_\delta$  acabaram tornando-se os mais importantes, pois muitos pesquisadores passaram a estudar as propriedades das topologias  $\tau_0$ ,  $\tau_\omega$  e  $\tau_\delta$ , e as relações entre elas. O livro de Dineen [8] expõe os resultados de vários autores nessa direção.

### Publicações de Leopoldo Nachbin

- [1] Sobre a permutabilidade entre as operações de passagem ao limite e de integração de equações diferenciais. An. Acad. Brasil. Ciênc. 13 (1941), 327-335. (MR 3, 239).
- [2] Un'estensione di un lemma di Dirichlet, Atti Accad. Italia Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (7) 3 (1942), 204-208. (MR 8, 263).
- [3] Sobre as séries de funções quasi-sempre absolutamente divergentes, Univ. Nac. Tucumán. Revista A. 3 (1942), 311-315. (MR 5, 117).
- [4] An extension of the notion of integral function of the finite exponential type, An. Acad. Brasil. Ciênc. 16 (1944), 143-147. (MR 6, 60).
- [5] Algunos teoremas sobre las séries de términos positivos, Math. Notae 4 (1944), 90-104. (MR 6, 47).
- [6] On linear expansions I, Trans. Amer. Math. Soc. 59 (1946), 437-440. (MR 7, 518).
- [7] On linear expansions II, Summa Brasil. Math. 1 (1946), 17-20. (MR 7, 518).
- [8] Sur la combinaison des topologies pseudo-métrisables et métrisables, C. R. Acad. Sci. Paris 223 (1946), 938-940. (MR 8, 285).
- [9] Combinação de topologias metrisáveis e pseudo-metrisáveis, Notas Mat. 1 (1947).
- [10] Une propriété caractéristique des algèbres booléennes, Portugal. Math. 6 (1947), 115-118. (MR 9, 324).
- [11] Sobre el axioma de las sucesiones no convergentes en algunos espacios topológicos lineales, Rev. Un. Mat. Argentina 12 (1947), 129-150. (MR 9, 367).
- [12] Espaços vetoriais topológicos, Notas Mat. 4 (1948). (MR 10, 610).
- [13] Sur les espaces topologiques ordonnés, C. R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), 381-382. (MR 9, 367).
- [14] Sur les espaces uniformisables ordonnés, C. R. Acad. Sci. Paris 226 (1948), 547. (MR 9, 367).
- [15] Sur les espaces uniformes ordonnés, C. R. Acad. Sci. 226 (1948), 774-775. (MR 9, 455).
- [16] On a characterization of the lattice of all ideals of a Boolean ring, Fund. Math. 36 (1949), 137-142. (MR 11, 712).
- [17] On strictly minimal topological division rings, Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 1128-1136. (MR 11, 368).
- [18] A characterization of the normed vector ordered spaces of continuous functions over a compact space, Amer. J. Math. 71 (1949), 701-705. (MR 11, 39).
- [19] Sur les algèbres denses de fonctions différentiables sur une variété, C. R. Acad. Sci. Paris 228 (1949), 1549-1551. (MR 11, 20).
- [20] On the Hahn-Banach Theorem, An. Acad. Brasil. Ciênc. 21 (1949), 151-154. (MR 11, 114).
- [21] A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 28-46. (MR 11, 369).
- [22] On the continuity of positive linear transformations, Proc. Internat. Congress of Math., Cambridge, Mass. 1950, vol. I, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1952, 464-465.
- [23] Topologia e ordem, Univ. Chicago Press, Chicago, 1950.
- [24] Algunos problemas de análisis funcional, Simpósium sobre algunos problemas mate-

- máticos que se están estudiando em Latino América, Diciembre 1951. Centro de Coop. Cient. de la Unesco para América Latina, Montevideo, 1952, 15-21. (MR 14, 563).
- [25] Linear continuous functionals positive on the increasing continuous functions, *Summa Brasil. Math.* 2 (1951), 135-150. (MR 14, 288).
- [26] On a duality theorem for commutative groups, *An. Acad. Brasil. Ciênc.* 24 (1952), 137-142. (MR 14, 350).
- [27] Topological vector spaces of continuous functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 40 (1954), 471-474. (MR 16, 156).
- [27a] Aspectos do desenvolvimento recente da matemática no Brasil, *Ciênc. Cultura* 8 (1956), 213-217, *Soc. Parana. Mat. Anuario* 3 (1956), 28-41. (MR 19, 1150).
- [28] A generalization of Whitney's theorem on ideals of differentiable functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 43 (1957), 935-937. (MR 19, 753).
- [29] On the operational calculus with differentiable functions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 44 (1958), 698-700. (MR 20, 4610).
- [30] Algebras of finite differential order and the operational calculus, *Ann. of Math.* (2), 70 (1959), 413-437. (MR 21, 7444).
- [31] Alguns resultados recentes sobre equações diferenciais parciais lineares de coeficientes constantes, *Rev. Un. Mat. Argentina* 19 (1960), 187-191. (MR 24, A2135).
- [32] Integral de Haar, *Textos de Mat.* 7, Inst. Física Mat. Univ. Recife, Recife, 1960. (MR 22, 9571).
- [33] Distribuições e equações diferenciais parciais, *Textos de Mat.* 6, Conf. 1, Inst. Física Mat. Univ. Recife, Recife, 1960. (MR 23, A1911).
- [34] Extensão de funções reais contínuas, *Tópicos de Topologia, Exposições de Mat.* 3, Univ. Ceará, Fortaleza, Ceará, 1961.
- [35] Formulação geral do teorema de aproximação de Weierstrass para funções diferenciáveis, *Tópicos de Topologia, Exposições de Mat.* 3, Univ. Ceará, Fortaleza, Ceará, 1961.
- [36] On the finite dimensionality of every irreducible unitary representation of a compact group, *Proc. Amer. Math. Soc.* 12 (1961), 11-12. (MR 23, A526).
- [37] On the weighted polynomial approximation in a locally compact space, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 47 (1961), 1055-1057. (MR 27, 513).
- [38] Some problems in extending and lifting continuous linear transformations, *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem, 1960, Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon Press, Oxford, 1961, 340-350.* (MR 24, A2826).
- [39] Álgebras de operadores e de funções contínuas, *Rev. Un. Mat. Argentina* 20 (1962), 312-314. (MR 30, 5179).
- [40] Sur l'abondance des points extrémaux d'un ensemble convexe borné et fermé, *An. Acad. Brasil. Ciênc.* 34 (1962), 445-448. (MR 26, 6736).
- [41] Sur l'approximation polynomiale pondérée des fonctions réelles continues, *Atti 2a. Riunione del Grupamento de Matematici d'Expression Latine, Firenze and Bologna, 1961, Edizioni Cremonese, Firenze and Bologna, 1963, 42-58.*
- [42] Résultats récents et problèmes de nature algébrique en théorie de l'approximation, *Proc. Internat. Congress Math., Stockholm, 1962, Almqvist and Wiksells, Stockholm, 1963, 379-384.* (MR 31, 548).
- [43] Sur le théorème de Denjoy-Carleman pour les applications vectorielles indéfiniment différentiables quasi-analytiques, *C. R. Acad. Sci. Paris* 256 (1963), 862-863. (MR 26, 2864).
- [44] Fonctions analytiques et quasi-analytiques vectorielles et le problème d'approximation de Bernstein, *Sém. Lelong (Analyse), 1962/63, exp. N° 6, Faculté des Sc. Univ. Paris.* (MR 35, 7061).
- [45] Régularité des solutions des équations différentielles elliptiques, *Sém. Bourbaki, exp. 258* (1963).
- [46] Topics on topological vector spaces, Univ. Rochester, 1963.
- [47] Lectures on the theory of distributions, Univ. Rochester, 1963; *Textos de Mat.* 15, Inst. Física Mat. Univ. Recife, Recife, 1964. (MR 35, 4722).
- [48] Weighted approximation over topological spaces and the Bernstein problem over finite dimensional vector spaces, *Topology* 3, Suppl. 1 (1964), 125-130. (MR 28, 4286).

- [49] Elements of approximation theory, Univ. Rochester, 1964; Notas Mat. 33, 1965; Van Nostrand Math. Studies 14, Van Nostrand, New York, 1967; Krieger Huntington WV, 1976 (MR 34, 8038; 36, 572; 54, 3261).
- [50] Weighted approximation for algebras and modules of continuous functions: real and self-adjoint complex cases, Ann. of Math. (2) 81 (1965), 289-302. (MR 31, 628).
- [51] The Haar integral, Univ. Ser. Higher Math., Van Nostrand, New York, 1965; Krieger, Huntington WV, 1976. (MR 31,271; 54, 2925).
- [52] Topology and order, Van Nostrand Math. Studies 4, Van Nostrand, New York, 1965; Krieger, Huntington WV, 1976. (MR 36, 2125; 54, 3667).
- [53] Weighted approximation for function algebras and quasi-analytic mappings, Function Algebras, Scott, Foresman, Glenview, IL, 1966, 330-333. (MR 33, 7835).
- [54] Aproximação ponderada por polinômios, Atas do Terceiro Colóq. Brasil. Mat., Fortaleza, 1961, Inst. Mat. Pura Aplicada, Rio de Janeiro, 1966, 149-189. (MR 35, 4645).
- [55] On the topology of the space of all holomorphic functions on a given open subset, Indag. Math. 29 (1967), 366-368. (MR 35, 5910).
- [56] On spaces of holomorphic functions of a given type, Proc. Conf. Functional Analysis, Univ. California, Irvine, 1966, Thompson Book, 1967, 50-70. (MR 39, 3298).
- [56a] A brief report on mathematical education at universities in Brazil, Presented to the Second Inter-American Conf. on Math. Education, Lima Peru, Dec. 5-10, 1966.
- [57] Introdução à análise funcional: espaços de Banach e cálculo diferencial, Univ. Brasília, 1967; revised edition: Serie de Mat., Monografia 17, Organization of American States, Washington, D. C., 1976.
- [58] Holomorphic functions, domains of holomorphy and local properties, Univ. Rochester, 1967; North-Holland Math. Stud. 1, North-Holland, Amsterdam, 1970. (MR 43, 558).
- [59] Topology on spaces of holomorphic mappings, Sexto Col. Brasil. Mat., Poços de Caldas, 1967; Ergeb. Math. Grenzgeb. 47, Springer, Berlin, 1969. (MR 40, 7787).
- [60] Some aspects of holomorphic mappings, Center for Theor. Stud. Univ. Miami, Coral Gables, Flórida, 1968.
- [61] Métodos matemáticos da física, Inst. Mat. Pura Aplicada, Rio de Janeiro, 1968.
- [62] Convolution operators in spaces of nuclearly entire functions on a Banach space, Proc. Conf. ou Funcional Analysis and Related Fields, Univ. Chicago, 1968, ed. F. E. Browder, Springer, Berlin, 1970, 167-171.
- [63] Convoluções em funções inteiras nucleares, Atas de Análise funcional e Equações Diferenciais Parciais, São José dos Campos, 1969, Soc. Brasil. Mat.
- [64] Concerning holomorphy types for Banach spaces, Studia Math. 38 (1970), 407-412. (MR 43, 3787).
- [65] Concerning spaces of holomorphic mappings, Rutgers Univ., New Brunswick, New Jersey, 1970.
- [66] Sur les espaces vectoriels topologiques d'applications continues, C. R. Acad. Sci. Paris 271 (1970), 596-598. (MR 42, 6593).
- [67] Uniformité d'holomorphic et type exponentiel, Sém. Lelong (Analyse), 1970, Lecture Notes in Math. 205, Springer, Berlin, 1971, 216-224. (MR 52, 1304).
- [68] Weighted approximation, vector fibrations and algebras of operators (em colaboração com S. Machado e J. B. Prolla), J. Math. Pures Appl. (9) 50 (1971), 299-323. (MR 45, 2474).
- [69] Sur certaines propriétés bornologiques des espaces d'applications holomorphes (em colaboração com J. A. Barroso), Troisième Colloq. sur L'Analyse Fonctionnelle, Liège, 1970, Centre Belge de Recherches Math, Vander, Louvain, 1971, 47-55. (MR 52, 15006).
- [70] Concerning weighted approximation, vector fibration and algebras of operators (em colaboração com S. Machado e J. B. Prolla), J. Approx. Theory 6 (1972), 80-89. (MR 50, 2917).
- [71] Sur quelques aspects récents de l'holomorphic en dimension infinie, Sém. Goulaouic-Schwartz 1971/72: Équations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle, exp. 18, École Polytechnique, Centre de Math., Paris, 1972. (MR 52, 15549).
- [72] Entire functions of exponential type bounded on the real axis and Fourier transforms of distributions with bounded supports (em colaboração com S. Dineen), Israel J. Math. 13 (1972), 321-326. (MR 48, 47723).

- [73] On vector-valued versus scalar-valued holomorphic continuation, *Indag. Math.* 35 (1973), 352-354. (MR 48, 9395).
- [74] Recent developments in infinite dimensional holomorphy, *Bull. Amer. Math. Soc.* 79 (1973), 625-640. (MR 48, 871).
- [75] Limites et perturbations des applications holomorphes, *Fonctions analytiques de plusieurs variables et analyse complexe*, *Agora Math.* 1, Gauthier-Villars, Paris, 1974, 141-158. (MR 58, 2279).
- [76] A glimpse at infinite dimensional holomorphy, *Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy*, *Lecture Notes in Math.* 364, Springer, Berlin, 1974, 69-79. (MR 52, 15007).
- [77] On bounded sets of holomorphic mappings (em colaboração com J. A. Barroso e M. C. Matos), *Proceedings on Infinite Dimensional Holomorphy*, *Lecture Notes in Math.* 364, Springer, Berlin, 1974, 132-134. (MR 52, 15003).
- [77a] Brazil's mathematical requirements, *Gaz. Mat. (Lisboa)* 34-35 (1973/74) n° 129-132, 1-5.
- [78] Perturbation of holomorphic mappings revisited, *Rend. Mat.* (6) 8 (1975), 337-344. (MR 52, 6426).
- [79] On the priority of algebras of continuous functions in weighted approximation, *Convegno sugli Anelli di Funzione Continue*, *INDAM*, Roma, 1973, *Symposia Mat.* XVII, Academic Press, London, 1976, 169-183. (MR 53, 14102).
- [80] Some holomorphically significant properties of locally convex spaces, *Functional Analysis*, *Lecture Notes in Pure Appl. Math.* 18, Marcel Dekker, New York, 1976, 251-277. (MR 58,30240).
- [81] On holomorphy versus linearity in classifying locally convex spaces (em colaboração com J. A. Barroso e M. C. Matos), *Infinite Dimensional Holomorphy and Applications*, *North-Holland Math. Stud.* 12, North-Holland, Amsterdam, 1977, 31-74. (MR 57, 13478).
- [82] Algunas propiedades de topología y partes acotantes en holomorfía, *Bol. Departamento Ciénc.*, Pontificia Univ. Católica del Peru 9 (1977), 71-75.
- [82a] The development of mathematical physics and related functional analysis, and its role in a developing country, *Proc. Internat. Colloq. on the Role of Mathematical Physics in the Development of Science*, Collège de France, Paris, June 13-15, 1977. Unesco, *Bol. Soc. Paran. Mat.* (2) 2 (1981), 17-26. (MR 83i, 01082).
- [83] Analogies entre l'holomorphie et la linéarité, *Sem. Paul Krée: Équations aux Dérivés Partielles en Dimension Infinite* 4 (1977/78), exp. 1, Institut Henri Poincaré, Paris. (MR 82e, 46064).
- [84] Sur la densité des sous-algebres polynomiales d'applications continument différentiables, *Sém. Pierre Lelong-Henri Skoda (Analyse)* 1976/77, *Lecture Notes in Math.* 694, Springer, Berlin, 1978, 196-202. (MR 80d, 46046).
- [85] On the closure of modules of continuously differentiable mappings, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova* 60 (1978), 33-42. (MR 81g, 58004).
- [85a] Aspects of the recent development of functional analysis in Brasil, *Proc. Internat. Conf. Developing Mathematics in Third World Countries*, Khartoum, March 6-9, 1978, ed. M.E.A. El Tom, *North-Holland Math. Stud.* 33, North-Holland, Amsterdam, 1979, 81-87; *Bol. Soc. Paran. Mat.* (2) 1 (1980), 49-57.
- [86] A look at approximation theory, *Approximation Theory and Functional Analysis*, *North-Holland Math. Stud.* 35, North-Holland, Amsterdam, 1979, 309-331. (MR 81d, 46024).
- [87] Some topological properties of spaces of holomorphic mappings in infinitely many variables (em colaboração com J. A. Barroso), *Advances in Holomorphy*, *North-Holland Math. Stud.* 34, North-Holland, Amsterdam, 1979, 67-91. (MR 81i, 46049).
- [88] Some problems in the applications of functional analysis to holomorphy, *Advances in Holomorphy*, *North-Holland Math. Stud.* 34, North-Holland, Amsterdam, 1979, 577-583. (MR 58, 30215).
- [89] Warum unendlichdimensionale Holomorphie?, *Jahrbuch Überblicke Math.* 1979, Bibliographisches Inst., Mannheim, 1979, 9-20. (MR 81i, 46053).
- [90] Introducción al álgebra, Editorial Reverté, Spain, 1980.
- [91] Why holomorphy in infinite dimensions? *Enseign. Math.* 26 (1980), 257-269. (MR 82i, 46066).
- [92] Introduction to functional analysis: Banach spaces and differential calculus, Mono-

- graphs and Textbooks in Pure and Appl. Math. 60, Marcel Dekker, New York, 1981. (MR 82f, 58002).
- [93] Silva-holomorphy types (em colaboração com M. C. Matos), *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, Lecture Notes in Math. 843, Springer, Berlin, 1981, 437-487. (MR 83k, 46041a).
- [94] Entire functions on locally convex spaces and convolution operators (em colaboração com M. C. Matos), *Compositio Math.* 44 (1981), 145-181. (MR 83i, 46050).
- [94a] O desenvolvimento da matemática na América Latina, *Ciênc. e Cultura* 33 (1981), 649-651.
- [95] A brief outline of stochastic order, *Quinto Sem. Intern. Probabilidade e Estatística*, Univ. São Paulo, São Paulo, 1982.
- [96] Some natural problems in approximating continuously differentiable real functions, *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 83, Marcel Dekker, New York, 1983, 369-377.
- [96a] A glimpse at my career as a mathematician, *Ciênc. Cultura* 35 (1983), 3-5.
- [96b] Massera, one of the greatest mathematicians of Latin America of all times, *Ciênc. Cultura* 35 (1983), 917-919.
- [96c] The influence of Antonio Ribeiro Monteiro in the development of mathematics in Brazil, *Ciênc. Cultura* 35 (1983), 1976-1977; *Portugal. Math.* 39 (1980), xv-xviii.
- [97] A direct sum is holomorphically bornological with the topology induced by a Cartesian product (em colaboração com J. A. Barroso), *Portugal. Math.* 40 (1981), 252-256. (MR 87g: 46078).
- [98] On the existence of the smallest compact support of a seminorm and a linear mapping (em colaboração com J. A. Barroso), *Indag. Math.* 46 (1984), 233-238. (MR 86f: 46020).
- [98a] Some personal remembrance of Mário Schenberg, *Bol. Soc. Paran. Mat.* (2) 5 (1984), 97-103.
- [99] On pure uniform holomorphy in spaces of holomorphic germs, *Resultate Math.* 5 (1985), 117-122. (MR 87g: 46079).
- [100] A glance at holomorphic factorization and uniform holomorphy, *Complex Analysis Functional Analysis and Approximation Theory*, North-Holland Math. Studies 125, North-Holland, Amsterdam, 1986, 221-245. (MR 88h: 46088).
- [101] A Profile of Probability, Unicamp, Campinas, 1986.
- [102] Some aspects and problems in holomorphy, *Extracta Math.* 1 (1986), 57-72. (MR 91e: 46056).
- [103] On the weighted approximation of continuously differentiable functions, *Proc. Amer. Math. Soc.* 111 (1991), 481-485. (MR 91f: 41028).
- [104] Reinhardt domains of holomorphy in Banach spaces (em colaboração com M.C. Matos), *Adv. Math.* 92 (1992) 266-278. (MR 93d: 46069).
- [105] Compact unions of closed subsets are closed and compact intersections of open subsets are open, *Portugal. Math.* 49 (1992), 403-409.
- [106] Linearization of holomorphy mappings on locally convex spaces (em colaboração com J. Mujica), *J. Math. Pures Appl.* 71 (1992), 543-560. (MR 83k: 46038).
- [107] On the convexity of sets, *Bull. Polish Acad. Sci.*, a aparecer.
- [108] Convex cones and convex sets, *Portugal. Math.*, a aparecer.
- [109] Suplattice associated with convex sets, convex cones and affine spaces, *Mat. Apl. Comput.*, a aparecer.
- [110] Convex sets, convex cones, affine spaces and affine cones, manuscrito, 1993.

## Referências a Outros Autores

- [1] J. A. Barroso, prefácio do livro *Aspects of Mathematics and its Applications*, North-Holland Math. Library 34, North-Holland, Amsterdam, 1986, vii-ix.
- [2] S. Bernstein, Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe reel et l'une de ses applications. *Bull. Soc. Math. France* 52 (1924), 399-410.
- [3] K. D. Bierstedt - R. Meise, Bemerkungen über die Approximationseigenschaft lokal-konvexer Funktionenräume, *Math. Ann.* 209 (1974), 99-107.
- [4] K. D. Bierstedt - R. Meise, Induktive Limites gewichteter Räume stetiger and holomorp-

- her Funktionen, *J. reine angew. Math.* 282 (1976), 186-220.
- {5} N. Bourbaki, *Topologie Generale*, Chapitres 5 à 10, Hermann, Paris, 1974.
  - {6} G. Coeure, Fonctions plurisousharmoniques sur les espaces vectoriels topologiques et applications à l'étude des fonctions analytiques, *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 20, 1 (1970), 361-432.
  - {7} J. Dieudonne, Recent developments in the theory of locally convex vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.* 59 (1953), 495-512.
  - {8} S. Dineen, *Complex Analysis in Locally Convex Spaces*, North-Holland Math. Studies 57, North-Holland, Amsterdam, 1981.
  - {9} L. Gillman - M. Henriksen, Concerning rings of continuous functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* 77 (1954), 340-362.
  - {10} L. Gillman - M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, New York, 1960.
  - {11} D. Goodner, Projections in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 69 (1950), 89-108.
  - {12} M. Hasumi, The extension property in complex Banach spaces, *Tohoku Math. J.* 10 (1958), 135-142.
  - {13} E. Hewitt, Rings of real-valued continuous functions I, *Trans. Amer. Math. Soc.* 64 (1948) 45-99.
  - {14} E. Hewitt, Linear functionals on spaces of continuous functions, *Fund. Math.* 37 (1950), 161-189.
  - {15} J. Horvath, The life and works of Leopoldo Nachbin, *Aspects of Mathematics and its Applications*, North-Holland Math. Library 34, North-Holland, Amsterdam 1986, 1-75.
  - {16} J. Kelley, Banach spaces with the extension property, *Trans. Amer. Math. Soc.* 72 (1952), 323-326.
  - {17} M. C. Matos, Uma saudação ao mestre e amigo, discurso durante a sessão solene de entrega a Nachbin do título de Professor Honorário da Universidade Estadual de Campinas, 1989.
  - {18} S. N. Mergelyan, Weighted approximations by polynomials, *Amer. Math. Soc. Transl.* 10 (1958), 59-106.
  - {19} J. Mujica, Leopoldo Nachbin (1922-1993), *Results Math.*, a aparecer.
  - {20} J. B. Prolla, Approximation of vector-valued functions, *North-Holland Math. Studies* 25, North-Holland, Amsterdam, 1977.
  - {21} J. B. Prolla, notícia sobre Leopoldo Nachbin, *Approximation, Probability and Related Fields*, Plenum Publ. Co., a aparecer.
  - {22} J. Schmets, Espaces de fonctions continues, *Lecture Notes in Math.* 519, Springer, Berlin, 1976.
  - {23} J. Schmets, Spaces of vector-valued continuous functions, *Lecture Notes in Math.* 1003, Springer, Berlin, 1983.
  - {24} T. Shirota, On locally convex vector spaces of continuous functions, *Proc. Japan Acad.* 30 (1954), 294-298.
  - {25} M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans. Amer. Math. Soc.* 41 (1937), 375-481.
  - {26} W. H. Summers, A representation theorem for bi-equicontinuous completed tensor products of weighted spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 146 (1969), 121-132.
  - {27} W. H. Summers, Dual spaces of weighted spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 151 (1970), 323-333.
  - {28} K. Weierstrass. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente, *S. B. Deutsch Akad. Wiss. Berlin KL. Math. Phys. Tech.* (1885), 633-639, 789-805.
  - {29} M. D. Weir, Hewitt-Nachbin spaces, *North-Holland Math. Studies* 17, North-Holland, Amsterdam, 1975.
  - {30} H. Whitney, On ideals of differentiable functions, *Amer. J. Math.* 70 (1948), 635-658.