

*O Professor Manoel Perdigão do Carmo, ilustre matemático brasileiro, ganhador do prêmio de matemática concedido pela Academia de Ciências do Terceiro Mundo (TWAS), no ano de 1992, concedeu a Pedro Mendes a entrevista transcrita a seguir:*

**Pedro:** Conte-nos sobre suas origens em Alagoas e seus primeiros passos em busca da Matemática.

**Manfredo:** Nasci em 15 de agosto de 1928 na cidade de Maceió, Alagoas. Fiz o Curso Secundário nesta cidade, uma boa parte no Colégio Marista e o último ano (1946) no Colégio Estadual. Neste último ano do Curso Secundário, segui o curso do Professor Benedito de Moraes, o qual revisava toda a matemática elementar. Este curso e o próprio Prof. Benedito marcaram fortemente a minha formação.

Em 1947, fiz o Vestibular para a Escola de Engenharia do Recife, onde segui o Curso de Engenharia Civil. Naquele tempo, existiam poucos cursos de Matemática no Brasil, todos no sul do país, e uma boa parte dos “interessados em Matemática” exerciam suas atividades nas escolas de Engenharia. Na Escola de Engenharia do Recife, ensinavam os professores Luiz Freire (Física), João Holmes Sobrinho (Mecânica Racional) e Newton Maia (Cálculo). Os cursos de Mecânica e Cálculo eram dados por velhos textos franceses (Appell e de la Vallée-Poussin) e, embora antiquados eram sólidos. A influência do Prof. Luiz Freire era de outra natureza. Ao lado de uma profunda irreverência em relação àqueles que denominava “os sábios da província”, ele estimulava os alunos que considerava talentosos a seguirem uma carreira científica.

Em dezembro de 1951, conclui o curso de Engenharia e no ano seguinte voltei a Maceió para trabalhar no Departamento de Estradas de Alagoas. O que havia ficado do Curso de Engenharia era um grande interesse por Física e Matemática, mas, a prática da engenharia de estradas parecia ter pouca coisa a ver com isto.

**Pedro:** Que estradas levaram o engenheiro civil Manoel P. do Carmo ao encontro dos caminhos a serem percorridos pelo futuro geômetra em que você se transformou?

**Manfredo:** Em 1954, o Professor Luiz Freire me indicou para uma posição

no Departamento de Matemática do Instituto Tecnológico da Aeronáutica (ITA), em São José dos Campos. Permaneci alguns meses no ITA, quando soube que havia sido criado o Instituto de Física e Matemática da Universidade do Recife, com uma biblioteca razoável e dois professores estrangeiros contratados para treinar jovens matemáticos. Voltei ao Recife e obtive uma posição precária na Escola de Engenharia. Isto, junto com algumas aulas particulares de Física, dava para manter alma e corpo unidos. Resolvi iniciar, a partir de 1955, um longo período de preparação que me levasse a algum problema de pesquisa.

A existência do recém-criado Instituto de Física e Matemática foi fundamental para que eu não perdesse o rumo nos anos que se seguiram. A presença dos professores portugueses Alfredo Pereira Gomes e Manuel Zaluar Nunes e a visita de alguns matemáticos estrangeiros (A. Denjoy, F. Bruhat, entre outros) me colocou em contacto com vários assuntos fundamentais (Topologia, Álgebra Abstrata, Análise Funcional, Grupos de Lie, etc.) sobre os quais eu tinha idéias vagas ou absolutamente nenhuma idéia.

Os anos de 1955 e 1956 foram inteiramente dedicados ao preenchimento de lacunas na minha formação matemática. Neste mesmo período, desenvolveu-se a idéia, provavelmente motivada por meu interesse em Física, de que eu gostaria de trabalhar em Geometria Diferencial.

Em julho de 1957, aconteceu o 1º Colóquio Brasileiro de Matemática. O Colóquio reuniu-se por três semanas na cidade de Poços de Caldas, sob a coordenação do Prof. Chaim Hönl. O número de participantes era relativamente pequeno (uma fotografia da época indica 37 participantes). Entretanto, foi para mim uma revelação saber que existia no Brasil uma comunidade com objetivos semelhantes aos meus. No Colóquio, conheci o Prof. Alexandre Rodrigues, da Universidade de S. Paulo, que acabara de fazer o Doutorado em Chicago sob a orientação do Prof. S.S. Chern, que era considerado o geômetra diferencial mais destacado do momento. Soube ainda que um amigo meu de infância, Elon Lima, estava também fazendo o Doutorado em Chicago, trabalhando em Topologia Algébrica, uma área próxima da Geometria Diferencial.

A partir do Colóquio, os meus estudos se tornaram mais objetivos. Iniciei uma correspondência com Elon Lima sobre a melhor maneira de me preparar para estudar Geometria Diferencial e obtive vários livros e notas de curso que eram de uso corrente em Chicago. Durante um ano e meio, dediquei uma boa parte de meu tempo a estudar, solitário, este material.

Em julho de 1958, Elon Lima voltou ao Brasil e encontramos-nos em Fortaleza, onde eu estava dando um curso de férias de Geometria Diferencial. Concor damos que a melhor maneira de eu continuar os meus estudos era passar um ano no IMPA. Desta maneira, em janeiro de 1959, vim para o Rio de Janeiro, a fim de fazer um estágio de especialização no IMPA sob a orientação do Prof. Elon Lima.

*Pedro: Quando e em que circunstâncias você se decidiu e se preparou para fazer o Doutorado em Matemática?*

**Manfredo:** Permaneci no IMPA de janeiro de 1959 a setembro de 1960. Até então, a Matemática havia sido para mim uma questão de aprendizagem. No IMPA, comecei a ver a Matemática sendo feita. O Prof. Maurício Peixoto estava envolvido no seu trabalho de Sistemas Dinâmicos e o Prof. S. Smale, que visitou o IMPA por seis meses, estava trabalhando na conjectura de Poincaré. Embora pequeno, o IMPA tinha uma grande quantidade de cursos, seminários e palestras matemáticas. Em várias e longas conversas que tive com Elon Lima dúvidas que haviam ficado da minha face autodidática no Recife se dissiparam sem maior esforço. Também com Elon, aprendi Topologia Algébrica e uma visão de Variedades Diferenciáveis que me seria útil para o resto da vida.

A uma certa altura deste período, tomei a decisão de me dedicar inteiramente à Matemática. Decorria daí que eu devia fazer o Doutorado em uma boa Universidade. Como eu estava interessado em Geometria Diferencial, era natural procurar estudar com S. S. Chern. Pouco tempo depois, soube que Chern estava saindo de Chicago e indo para a Universidade da Califórnia, Berkeley. Felizmente, Chern era amigo de vários matemáticos brasileiros. Através de cartas desses amigos, Chern me aceitou como aluno. Assim, em setembro de 1960, fui para a Universidade da Califórnia, Berkeley, estudar Geometria Diferencial com S. S. Chern.

*Pedro: E o Doutorado em Berkeley, como transcorreu?*

**Manfredo:** Além de Chern, vários outros matemáticos tinham sido de Chicago e ido para Berkeley. Entre eles, devem ser mencionados S. Smale, que eu havia conhecido no IMPA, e E. Spanier, que havia sido o orientador de Elon Lima. Havia, portanto, uma grande efervescência em áreas afins à Geometria, com seminários vários e palestras interessantes. Por outro lado, Berkeley exigia que os seus alunos de Doutorado, antes de iniciar o trabalho de tese, fossem aprovados em um Exame de Qualificação oral, com três bancas distintas, uma de Álgebra, uma de Análise e uma de Geometria. Alguns alunos mais jovens gastavam o primeiro ano da universidade tomando cursos preparatórios a este Exame. Resolvi adotar uma atitude mista. Segui os cursos de Álgebra e Teoria da Medida, onde a minha preparação era mais fraca, e completei o programa de cursos com um de Chern e alguns seminários interessantes. Isto me deu maior maturidade para o exame, no qual fui aprovado no ano seguinte com Honors.

Estava agora livre para me dedicar a seminários avançados e à tese. Em julho do ano anterior, houvera uma grande reunião de Geometria Diferencial em Berkeley, da qual eu havia assistido a quase todas as conferências. Em muitas delas, perdia-me antes do meio, mas, ficava o quadro geral e a percepção de quais eram os problemas principais da área. Fiz várias tentativas infrutíferas em alguns desses problemas e terminei me fixando no "pinching problem". Esta questão

havia sido proposta por Heinz Hopf na década dos 40 e indagava se uma variedade riemanniana compacta e simplesmente conexa, cuja curvatura era “próxima” da curvatura da esfera, era topologicamente uma esfera. A medida da “proximidade” era dada por quanto a relação entre as curvaturas máxima e mínima (o “pinching” da curvatura) se aproximava de 1.

Uma contribuição fundamental ao problema havia sido dada por Rauch em 1951. As técnicas utilizadas por Rauch deram origem a um resultado independente, o chamado teorema de Rauch, que veio a desempenhar um papel fundamental no desenvolvimento da Geometria Riemanniana. Em 1959, Klingenberg melhorou o resultado de Rauch e introduziu outras técnicas no problema. Em 1960, Berger resolveu completamente o problema em dimensão par, mostrando que para um pinching  $> 1/4$  o resultado é verdadeiro e que para o pinching  $= 1/4$  existem contra-exemplos, entre os quais o espaço projetivo complexo que faz o papel da esfera na Geometria Complexa.

Este último fato já era conhecido por Rauch que, em 1953, esboçou umas idéias de como estender o teorema, tomando outros espaços como espaços de comparação. O artigo era muito vago e considerado difícil de entender naquela época. Chern já me havia mencionado que se eu entendesse bem as idéias de Rauch, aquilo poderia dar uma tese.

Por sorte minha, Klingenberg e Berger estavam visitando Berkeley durante este período. Estudei a literatura sobre o assunto e tive longas conversas com ambos. A partir daí, consegui formular uma questão que estava implícita no artigo de Rauch. A idéia era definir adequadamente um “pinching” entre o espaço projetivo complexo e uma variedade complexa com uma métrica compatível com a estrutura complexa (as chamadas variedades kahlerianas) e perguntar se, para um “pinching” próximo de 1, a variedade era topologicamente o espaço projetivo complexo. Em julho de 1962, obtive uma resposta parcial, porém satisfatória, ao problema. O resultado foi apresentado em uma reunião informal de Geometria em agosto de 1962 e houve várias discussões sobre a validade dos argumentos que eu havia utilizado. Passei uma boa parte do resto de 62 redigindo cuidadosamente os detalhes do trabalho e defendi a tese em janeiro de 63. Antes de voltar ao Brasil, recebi convites da Universidade de Princeton e do M.I.T. para fazer conferências sobre o resultado obtido. O trabalho foi finalmente publicado no *Annals of Mathematics*, considerado na época a mais exigente revista de matemática.

*Pedro: Segundo ouvi dizer, Klingenberg reivindica ter sido seu orientador de Doutorado quando você diz que foi aluno de Doutorado de S. S. Chern. E então?*

**Manfredo:** Como eu disse antes, quem dirigiu os meus estudos em Berkeley e influenciou de maneira decisiva a minha formação matemática foi S. S. Chern. Foi também ele quem me indicou o tópico de tese (sem especificar o problema) e o artigo do Rauch que eu deveria tentar entender. Finalmente, foi Chern quem me

incentivou a conversar com Klingenberg quando este estava visitando Berkeley a convite do próprio Chern.

Por outro lado, Klingenberg foi a pessoa que me ajudou a formular e resolver o problema específico da tese; além disso, ele foi o primeiro a perceber que eu havia feito alguma coisa interessante.

Na Introdução da minha tese (Ann. of Math. 81 (1965), 1-14) eu expliquei a situação do seguinte modo: "É com prazer que reconhecemos a nossa dúvida com o Prof. W. Klingenberg, sob cuja supervisão este trabalho foi escrito, por suas sugestões e encorajamento. Desejamos agradecer ao Prof. S. S. Chern por ter dirigido nossos estudos em Berkeley; agradecemos também ao Prof. M. Berger por longas horas de conversas em geometria riemanniana".

Ambos, Chern e Klingenberg me colocam em suas listas de alunos. Não há paradoxo algum nisto; é um mero caso de co-orientação da tese.

*Pedro: Quando você voltou ao Brasil, após concluir o Doutorado, pelos idos de 1963, imagino que fazer pesquisa em Matemática por aqui era inviável. Que atitudes você tomou e que fatos contribuíram para que sua Tese de Doutorado não fosse seu último trabalho científico?*

**Manfredo:** Voltei ao Recife em fevereiro de 1963. As minhas atividades eram divididas entre a Escola de Engenharia, onde dava duas turmas de Cálculo (aproximadamente, 100 alunos em cada turma), o Curso de Matemática da Faculdade de Filosofia, onde dava um curso de Geometria Diferencial, e o Instituto de Física e Matemática, onde procurava organizar alguns seminários. O Instituto de Física e Matemática havia se consolidado sob a direção do Prof. Luiz Freire e mais dois matemáticos portugueses, o Prof. Ruy Gomes e o Prof. José Morgado, trabalhavam lá além de darem as aulas de Análise e Álgebra, respectivamente, na Faculdade de Filosofia.

Como havia sido convidado a dar um curso no 4º Colóquio Brasileiro de Matemática, a se realizar em julho de 1963, resolvi redigir as aulas do curso dado na Faculdade de Filosofia. Isto foi a primeira versão de um livro de Geometria Diferencial que, anos mais tarde, seria publicado em inglês.

A situação da Matemática no país começava a se modificar. Um grande número de jovens talentosos estava fazendo o Doutorado no exterior. A universidade brasileira estava, aparentemente, disposta a se transformar e a incorporar a pesquisa como um elemento fundamental. A esta altura, a organização da Universidade de Brasília apareceu a muitos cientistas brasileiros como a realização de um sonho. Seria uma universidade modelo de onde as mudanças, uma vez consolidadas, se espalhariam para o resto do Brasil. Participei de algumas reuniões de organização desta Universidade e fiquei convencido que estávamos diante de um fato novo na vida brasileira.

Neste período, a minha atividade de pesquisa foi praticamente nula, e agi

muito mais como missionário do que como pesquisador. Além dos meus cursos regulares, dei cursos no Rio Grande do Norte e no Ceará, organizei grupos de estudo com alunos da Escola de Engenharia e da Faculdade de Filosofia e estimulei a todos em quem eu via algum talento a seguirem, sem temor, uma carreira científica.

Em junho de 1964, estive em um Congresso de Geometria Diferencial em Oberwolfach, Alemanha. Ficou claro para mim que eu estava perdendo de vista o que estava acontecendo com a Geometria Diferencial no mundo. Refletindo sobre o assunto, concluí que a minha carreira havia apenas começado e que já estava em tempo de eu voltar a trabalhar em pesquisa. Pedi então, uma bolsa Guggenheim a ter início em setembro de 1965.

No início de 1965, tomei a decisão de não permanecer no Recife, mesmo depois de um Pós-Doutorado. Eu havia sabido que o amigo e colega Elon Lima tinha assumido a coordenação do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. Vários outros grupos existiam em Brasília que, aparentemente, não havia sido destruída pelo movimento militar de 64. Talvez ainda pudéssemos criar a Universidade modelo com que sonhávamos. Além disso, Elon Lima seria um companheiro de pesquisas. Após um curto período de negociação, pedi uma licença sem vencimentos da Universidade Federal de Pernambuco e fui para Brasília.

*Pedro: Como foi sua passagem pela Universidade de Brasília?*

**Manfredo:** Em Brasília, iniciei uma colaboração com Elon Lima sobre imersões convexas. O ambiente da Universidade era excelente. Embora houvesse dificuldades físicas de toda ordem (tive que alugar um quarto em uma casa de família, pois a Universidade não dispunha de residências no momento), respirava-se um ar de renovação em todos os Departamentos. A idéia era que os alunos fizessem um ciclo de disciplinas básicas antes de escolher a linha profissional. Para os cursos básicos eram escolhidos os professores mais maduros (Elon estava dando um curso de Cálculo e Roberto Salmeron um curso de Física Básica).

Embora Brasília ainda não estivesse consolidada, a Universidade supria as deficiências culturais de uma cidade em formação. Todos os sábados, tínhamos um concerto organizado por Cláudio Santoro, coordenador do Departamento de Música. Nelson Pereira dos Santos, coordenador do Departamento de Cinema, organizou um excelente ciclo Kurosawa e outros estavam em preparação.

Em maio de 1965, recebi uma carta da Guggenheim Foundation, comunicando-me que a minha bolsa havia sido concedida e que eu poderia iniciá-la em setembro desse ano. Escrevi-lhes uma longa carta, explicando-lhes que tipo de Universidade estávamos tentando desenvolver e pedindo a transferência da bolsa por um ano. A resposta não poderia ser mais entusiástica e a transferência foi concedida.

Logo depois, começaram os problemas. Os militares de Brasília sempre encararam a Universidade como um ambiente, no mínimo, suspeito. De vez em quando, os militares “pinçavam” um membro do corpo docente e exigiam da Universidade que ele fosse demitido, por razões não explícitas de “segurança”. Surgiu, então, um sentimento de não aceitar estas demissões arbitrárias. O ambiente começou a ficar tenso e, a uma certa altura, os coordenadores dos vários Departamentos decidiram pedir demissão coletiva. A maioria dos Departamentos se reuniu e decidiu que nenhum membro do Departamento aceitaria a coordenação antes de ser resolvido o problema das demissões arbitrárias. Logo depois, como a situação continuasse a mesma, alunos e professores da Universidade entraram em greve.

Em outubro de 1965, permanecendo o impasse e esgotadas as esperanças de solução, a quase totalidade dos professores da Universidade de Brasília pediu demissão individualmente. Os vários membros da Universidade se espalharam pelo Brasil e pelo mundo. Foi uma perda irreparável que ainda não foi devidamente avaliada.

*Pedro: Depois da desalentadora implosão da Universidade de Brasília, imagino que chegou a vez da Guggenheim?*

**Manfredo:** Ainda não. Depois de sair da Universidade de Brasília, aceitei um convite do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Ceará, que estava iniciando um Programa de Mestrado, para ficar lá um ano como Professor Visitante. Vieram comigo de Brasília José Ubirajara Alves, que havia sido meu contemporâneo como estudante de doutorado em Berkeley, e Plínio Simões, que havia feito o Mestrado em Brasília com Elon Lima. Transferi mais uma vez a minha bolsa Guggenheim para início de 67 e instalei-me em Fortaleza.

As minhas atividades consistiram em dar os cursos do segundo ano do Mestrado (Análise no  $R^n$ , Teoria da Integração e Geometria Diferencial) e preparar a versão final do meu livro de Geometria Diferencial (que só seria publicada em 1971 pelo Livro Técnico). Neste último projeto, tive a colaboração inestimável de J. Lucas Barbosa e Plínio Simões. Ambos se interessaram por Geometria Diferencial e acabaram fazendo o doutorado em Berkeley com S. S. Chern.

Perto do final do ano, com o livro praticamente concluído, comecei a preparar a minha viagem para Berkeley, onde pretendia utilizar a minha bolsa Guggenheim. A destruição da Universidade de Brasília tinha me deixado um travo amargo na boca; eu não tinha certeza se voltaria ao Brasil.

*Pedro: Como foi o retorno a Berkeley? O novo estágio foi proveitoso?*

**Manfredo:** Cheguei a Berkeley em fevereiro de 1967 e lá permaneci até meados de 1969. Foi um dos períodos mais ativos da minha vida profissional. Os primeiros trabalhos foram sobre convexidade e curvatura. Elon Lima estava

passando um tempo em Berkeley e aproveitamos para retomar as nossas idéias, interrompidas desde a crise de Brasília.

Passamos algum tempo tentando entender o campo gradiente da função altura de uma hipersuperfície completa do espaço euclidiano com curvatura seccional não negativa e com um ponto onde todas as curvaturas fossem positivas. Conseguimos provar que uma tal hipersuperfície é o bordo de um corpo convexo, o que nos deixou muito contentes. Escrevemos uma versão preliminar do trabalho e, logo depois, o Elon voltou ao Brasil.

Mostrei o trabalho a Frank Warner que apresentou uma objeção a um argumento crucial. A objeção era séria e levei algum tempo até poder contorná-la. Tínhamos, finalmente, um belo resultado em mãos. Escrevi a versão final do artigo. Pouco tempo depois, encontrei a referência de um artigo cujo título se assemelhava ao que havíamos feito. Fui imediatamente conferir: era, com outros métodos, exatamente o que havíamos feito, publicado em 1962 no *American Journal of Mathematics* por R. Sacksteder. Decepcionado, coloquei o artigo já pronto na gaveta. Restava o consolo de termos obtido um resultado importante de maneira independente. Não percebi, no momento, que não só a nossa demonstração era mais simples do que a de Sacksteder, mas, que permitia obter mais informações sobre a superfície convexa. Anos mais tarde, um artigo de H. H. Wu me chamou a atenção para este ponto de vista, e o artigo foi finalmente publicado no *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*.

Utilizando o método do gradiente, obtivemos também uma condição para que uma variedade compacta  $M^n$  do espaço euclidiano  $R^{n+p}$  estivesse contido em  $R^{n+1}$ . O resultado é global, e foi publicado no *Archiv der Mathematik*. Ele tem sido citado em quase todos os "surveys" sobre o assunto e é mencionado no prefácio do livro "Elementary Topics of Differential Geometry" de J. Thorpe como tendo inspirado o seu tratamento deste tópico.

Ainda aproveitando o método do gradiente, estudei as variedades de dimensão infinita modeladas em um espaço de Hilbert e provei que as hipersuperfícies completas de um espaço de Hilbert com curvaturas que não se aproximam de zero são bordos de um corpo convexo.

Fiz também um trabalho em colaboração com Frank Warner, a quem havia conhecido como estudante do M.I.T. quando eu estava estudando em Berkeley. A pergunta que tentamos responder foi motivada pelos teoremas clássicos de rigidez e convexidade que afirmam o seguinte: Uma hipersuperfície compacta de um espaço euclidiano é rígida e convexa se a curvatura seccional é maior ou igual a zero, que é a curvatura do ambiente. Será que se o espaço ambiente tem curvatura constante, digamos 1, e a curvatura seccional da hipersuperfície é maior ou igual a 1, o teorema continua válido? A resposta é positiva e resultado foi publicado no *Journal of Differential Geometry*.

Em janeiro de 1968, Chern resolveu dar um curso de Subvariedades Mínimas.



Havia aparecido um preprint de J. Simons sobre subvariedade mínimas compactas da esfera que, na opinião de Chern, iria ter um forte impacto na veneranda teoria das superfícies mínimas. O curso pretendia cobrir uma parte clássica e o material do preprint de Simons.

A esta altura, Berkeley havia se transformado em uma espécie de Meca da Geometria Diferencial e dos Sistemas Dinâmicos sob as lideranças de Chern e Smalae, respectivamente. Entre os Assistentes do Departamento estavam J. Cheeger, H. H. Wu, Ivan Kupka, D. Sullivan, F. Warner e N. Wallach. Entre os visitantes do Departamento se encontravam D. Gromoll, W. Meyer e, por um curto período, W. Klingenberg. Smale tinha aproximadamente uns dez estudantes (entre os quais Jacob Palis, que viria a ser meu colega e companheiro de lutas no IMPA) e Chern um outro tanto. Devido a isto, e várias outras razões, o Curso do Chern teve uma audiência fora do comum.

Dediquei-me ao curso com afinco. A uma certa altura, Chern propôs um problema que estava implícito no artigo de Simons. Eu já estava bem familiarizado com as técnicas do assunto e comecei a pensar no problema naquela mesma noite. Uma semana depois, eu tinha uma idéia de como resolver uma parte do problema e, depois da aula, fui falar com Chern sobre o que havia feito. Simultaneamente, S. Kobayashi também queria falar com Chern: em suas mãos, um trabalho redigido e datilografado que aparentemente resolvia completamente o problema. No entanto, eu descobri um erro no argumento de Kobayashi e, na semana seguinte, eu tinha uma solução também aparentemente completa. Foi então, a vez de Kobayashi descobrir um erro na minha solução. Após mais algumas semanas, chegamos a uma solução definitiva, e resolvemos escrever um artigo, Chern, eu e Kobayashi. O artigo, escrito de maneira bastante didática, tornou-se uma referência básica no assunto.

Este foi o ponto de partida do meu interesse por superfícies mínimas que ocuparia uma boa parte das minhas atividades nos anos seguintes.

O artigo de Simons mostrou a importância de estudar imersões mínimas em esferas. Para o caso de  $S^2$  em  $S^m$ , um trabalho fundamental havia sido feito por E. Calabi, um ano antes do artigo de Simons. Estava implícito no trabalho de Calabi que tais imersões, se têm curvatura constante (isto é, as mais simples), são todas dadas por harmônicos esféricos de  $S^2$ . E as imersões mínimas de  $S^n$  em  $S^m$  com curvatura constante, quando  $n > 2$ ? A partir de um resultado de Takahashi, não era difícil demonstrar que os esféricos harmônicos de  $S^n$  dariam algumas destas imersões. Seriam todas? Este problema começou a me intrigar, pois não conseguia demonstrar que, de fato, eram todas. As pessoas a quem perguntei sobre o assunto diziam que era provavelmente verdade e devia decorrer de algum teorema da representação de grupos de Lie. Procurei Nolan Wallach, um especialista em grupos de Lie. Imediatamente, ele se ingressou pelo problema e concluiu que, se fosse verdade, seria interessante e não-trivial.

Passamos a trabalhar juntos no problema. Produzimos várias provas que não

resistiam mais que alguns dias. Em julho de 68, tivemos uma longa conversa com Calabi, que estava visitando Berkeley por um período curto. Calabi achou que não só era verdade, mas, que devia sair dos métodos que ele havia utilizado em seu trabalho. Nolan Wallach ficou irritado e a conversa se transformou em um diálogo de surdos.

Pouco tempo depois, eu conheci Blaine Lawson em circunstâncias curiosas. Em verdade, Osserman havia ligado para Chern mencionando que a tese de Lawson continha uma parte do resultado de nosso artigo com Kobayashi; fizemos a citação devida. Agora, terminada a tese, ele tinha vindo para Berkeley. Na cópia preliminar de sua tese, ele mencionava que a pergunta na qual eu trabalhava com Wallach tinha uma resposta positiva. Assim que lhe fui apresentado, perguntei de chofre: "Na sua tese, você afirma tal coisa; como é que você prova isto"? Ele sorriu e respondeu imperturbável: "Retirei aquela afirmação da versão final. Osserman me pediu detalhes e eu descobri que não sabia como fazer. Parece difícil". Dei um suspiro de alívio.

Como o problema continuava a resistir, eu e Wallach resolvemos construir alguns exemplos. A certa altura, analisando os longos cálculos de um certo exemplo, concluímos que deveriam existir situações em que harmônicos esféricos de graus distintos se misturavam em uma mesma imersão. A partir daí, as coisas começaram a se arrumar. A resposta à nossa pergunta era negativa, mas, o conjunto das soluções formava um espaço bem organizado, em verdade, um corpo convexo de um espaço vetorial. Conseguimos determinar um limite inferior para a dimensão de um tal espaço (para o caso não-trivial) e levantamos uma série de questões que continuam em estudo por outros matemáticos até o presente. O artigo foi finalmente publicado no *Annals of Mathematics*.

Em fevereiro de 1968, acabou a minha bolsa Guggenheim. Pedi renovação por mais um ano, mas, ela só seria renovada (se fosse o caso) no segundo semestre de 68. Eu havia recebido algumas propostas de universidades americanas, mas, achei que para o meu trabalho era melhor permanecer em Berkeley como Visiting Professor em tempo parcial. Isto implicava dar um curso por período e não atrapalharia a minha pesquisa. Durante este tempo, dei um curso de Geometria Projetiva e um curso de Equações Diferenciais para engenheiros. Este último me foi muito útil no meu trabalho sobre superfícies mínimas. Dei também um curso de Geometria Riemanniana, que foi o germe de um livro que iria escrever anos depois.

Em setembro de 1968, J. Lucas Barbosa e Plínio Simões vieram para Berkeley estudar Geometria Diferencial com Chern. Os Estados Unidos se envolviam cada vez mais na guerra do Vietnam, e o movimento hippie estava em pleno vigor. A Matemática em Berkeley, entretanto, continuava excelente e era impressionante o número de brasileiros que, por uma razão ou outra, visitava Berkeley.

Por esta ocasião, tive várias conversas com Jacob Palis que estava terminando

sua tese com Smale e regressaria em breve ao Brasil. O tema de nossas preocupações era que até então uma boa parte da pesquisa matemática brasileira havia sido feita no exterior. Era necessário mudar este panorama e começar a fazer pesquisas no Brasil, se quiséssemos que o país adquirisse autonomia matemática. Os planos que fizemos na época frutificaram alguns anos mais tarde com o nosso trabalho no IMPA.

Fiz mais alguns trabalhos em colaboração com Nolan Wallach e, em março de 69, decidi que regressaria ao Brasil em julho desse ano. O IMPA estava reorganizando o seu curso de Pós-Graduação, com financiamento do BNDE. Elon Lima, Jacob Palis e Otto Endler estariam por lá e havia uma possibilidade que o sonho de realizar pesquisas matemáticas no Brasil se tornasse realidade. Eu havia recebido um convite para participar do Arbeitstagung de Hirzebruch em Bonn e para dar uma conferência de uma hora na Reunião de Geometria de Oberwolfach, Alemanha. Leny, minha esposa, estava fazendo o Mestrado no Departamento de Anatomia e Fisiologia de Berkeley e foi preciso um esforço especial para concluir tudo a tempo.

Depois de dois anos e meio, deixamos Berkeley. Foi um período agradável com muito trabalho e muitos amigos. Depois das reuniões de Bonn e Oberwolfach, visitamos algumas cidades da Europa e estávamos de volta ao Brasil em fins de agosto.

*Pedro: O IMPA possui um programa de Doutorado produtivo e respeitado internacionalmente. Fale-nos um pouco sobre a sua participação no estabelecimento deste programa.*

**Manfredo:** Quando voltei ao Brasil em agosto de 1969 o IMPA era dirigido por Elon Lima e estava na Rua Luiz de Camões (Centro) em instalações mais espaçosas. O financiamento do BNDE permitiu aumentar substancialmente o número de professores e de alunos de Pós-Graduação. Os programas estavam sendo reestruturados, e o grande desafio era montar um programa eficaz de Doutorado. Era um período de pioneirismo, mas, os resultados eram visíveis a olho nu. A maior parte de nós não tinha emprego e recebíamos por prestação de serviços.

Iniciei dando um curso de Geometria Diferencial Clássica e um seminário de Teoria de Morse para alunos mais avançados. Durante o verão de 70, dei um curso de Formas Diferenciais e preparei umas notas de curso que depois foram ampliadas para um curso no Colóquio Brasileiro de Matemática de 1971. Ainda no ano de 1970, dei um Seminário sobre Geometria Diferencial Global que foi publicado nas Monografias de Matemática do IMPA.

No ano seguinte, dei um curso de Geometria Riemanniana e aproveitei para completar a redação (em inglês) das notas de um curso de Bekerley. Os participantes do curso traduziram e ampliaram as notas, que foram publicadas ainda em 1971. O objetivo de todo este esforço foi preparar uma bibliografia básica para

alunos de Doutorado em Geometria Diferencial. O livro de Geometria Diferencial que eu havia escrito no Ceará foi também publicado em 1971, o que, junto com os textos acima mencionados, formava um bom ponto de partida para uma literatura básica de Geometria.

Ainda em 1971, assumi por dois anos a Presidência da Sociedade Brasileira de Matemática.

A primeira aluna do Programa de Doutorado em Geometria do IMPA foi Ketí Tenenblat, que concluiu seu doutorado em 1972. Ketí é hoje uma matemática internacionalmente respeitada pelas suas contribuições às aplicações da Geometria a Equações Diferenciais Parciais.

*Pedro: Quando é que você voltou às superfícies mínimas?*

**Manfredo:** Em 1972, visitei Berkeley por seis semanas. Em conversa com J. Lucas Barbosa, ele mencionou uma pergunta de Chern que se relacionava com um antigo resultado de Schwarz. Tal resultado afirma que se a imagem esférica de um domínio de uma superfície mínima está contida em um hemisfério, então este domínio é estável. A pergunta de Chern é se era necessário que a imagem esférica estivesse contida em um hemisfério ou se alguma outra propriedade do hemisfério, por exemplo, a área, é que era relevante.

Imediatamente me interessei pelo assunto e passamos a trabalhar juntos no problema. O artigo de Schwarz era de leitura difícil, mas, dava para perceber que o problema estava relacionado com estimativas dos valores próprios do Laplaciano, um assunto que estava começando a despertar a atenção de vários geométricos. Os analistas já conheciam este assunto de longa data, mas, se restringiam a domínios topologicamente triviais. De qualquer maneira, era necessário que eu me familiarizasse com o assunto. Conversei com Jerry Kazdan, que me ensinou várias coisas e me sugeriu a leitura de "Métodos Matemáticos da Física" de Courant-Hilbert. A esta altura, estávamos convencidos, Lucas e eu, que a área era o elemento essencial da questão.

De volta ao Brasil, continuei a trabalhar no problema em correspondência com Lucas. Alguns meses depois, havíamos obtido uma solução do problema. Uma versão preliminar foi apresentada no congresso de Geometria Diferencial de Stanford em 1973. R. Gulliver descobriu algumas lacunas em nossa prova, e fomos informados que a convergência do processo de simetrização, que era um ponto delicado na prova, já era conhecida na literatura. O "announcement" do resultado só foi publicado no Bulletin of the American Mathematical Society em 1974. A versão final completa foi enviada para o American Journal of Mathematics, e só foi publicada em 1976.

*Pedro: Como foi a publicação em inglês do seu livro de Geometria Diferencial?*

**Manfredo:** Quando Blaine Lawson visitou o IMPA de agosto a dezembro de 1970, ele se interessou em aprender português. Como parte do seu treino, ele leu os originais do livro de Geometria Diferencial que estava em impressão. A uma certa altura, ele me perguntou porque eu não traduzia o livro para o inglês, já que em inglês também existiam poucos livros de Geometria Diferencial Clássica e nenhum com aquele espírito. Como parte do seu interesse, ele me ajudaria a começar a tradução. Passamos alguns fins de semana trabalhando com afinco e conseguimos traduzir um terço do livro. Minha esposa Leny se entusiasmou pelo projeto e se encarregou do resto da tradução que, segundo o Blaine, ficou impecável. Assim sendo, quando viajei para Berkeley em 1972, levava na mala os originais em inglês de um livro que pretendia negociar com alguma editora americana.

As negociações se arrastaram até meados de 1973, quando finalmente decidi pela Prentice-Hall em função do fato de ser Jerry Kazdan o consultor matemático desta editora. Por sugestão do próprio Jerry Kazdan, resolvi incluir no livro as notas de Geometria Diferencial Global, o que deu mais trabalho a Leny, e adicionei alguns capítulos que escrevi diretamente em inglês. O número de exercícios aumentou consideravelmente. Finalmente, o livro que saiu publicado pela Prentice-Hall em 1976 era bem diferente do seu precursor em português de 1971. O livro foi dedicado a Leny, que participava deste projeto desde a versão de 1966 em Fortaleza.

O livro teve mais sucesso do que eu esperava. Ele foi adotado como texto nas melhores universidades americanas, foi traduzido para o alemão, e, recentemente, traduzido para o espanhol.

*Pedro: Conte-nos um pouco de seu movimentado intercâmbio científico realizado na segunda metade da década de 70.*

**Manfredo:** Em 1976, realizou-se no IMPA a 3ª Escola Latino-Americana de Matemática sobre Geometria e Topologia. Chern nos visitou neste período (era a segunda vez que ele fazia isto, a terceira e última sendo na inauguração do novo prédio do IMPA, Edifício Lélío Gama). Junto com outros colegas, fui um dos organizadores da reunião e, em colaboração com J. Palis, um dos editores dos Proceedings. Além disto, dei um curso sobre o Método do Referencial Móvel e apresentei um trabalho feito em colaboração com Gervásio Colares.

Em 1977, Lucas Barbosa visitou o IMPA por um ano e retornamos às nossas investigações sobre estabilidade. Este foi um período bastante produtivo de uma colaboração que se estendeu por vários anos. Estendemos o nosso teorema para o caso de superfícies mínimas em um espaço de curvatura constante e dimensão qualquer e estabelecemos um método para tratar o problema em uma variedade Riemanniana qualquer; este método vem sendo usado até hoje por outros matemáticos. Motivados pelo problema de estabilidade, fomos levados a estudar

estimativas dos valores próprios do Laplaciano e desigualdades isoperimétricas. Obtivemos uma demonstração de uma desigualdade isoperimétrica bem geral para domínios simplesmente conexos de uma superfície. R. Osserman, para quem mandei cópia do trabalho, nos chamou a atenção que a desigualdade já era conhecida. A nossa prova, entretanto, era diferente e cobria casos que as outras demonstrações não consideravam.

Em 1978, fui convidado a fazer uma conferência de 45 minutos no Congresso Internacional de Matemáticos, a se realizar em agosto daquele ano em Helsinki, Finlândia. Este é um convite honroso. O Congresso Internacional se reúne a cada quatro anos e convida um número limitado de matemáticos a apresentarem os seus trabalhos. Resolvi apresentar os resultados que havia obtido nos últimos anos sobre estabilidade de superfícies mínimas e levantar alguns problemas sobre o assunto. Uma das perguntas que propus era saber se o plano é a única superfície completa mínima do  $R^3$  tal que todo o seu domínio é estável. Em dezembro deste ano obtive, em colaboração com Alexandre Magalhães, uma elegante resposta afirmativa a esta questão para o caso particular em que a superfície tenha curvatura total finita; esta, entretanto, é uma restrição muito forte.

Desde o início de 78, eu estava planejando passar o ano de 1979 nos Estados Unidos. Leny havia terminado o seu Doutorado no Instituto de Biofísica da U.F.R.J., e estava se candidatando a uma bolsa pelos National Institutes of Health. O IMPA estava se desenvolvendo muito bem; havíamos montado um bem sucedido programa de Doutorado, e já se fazia pesquisa matemática no país. A maior parte dos meus alunos de Doutorado terminaria em 1978, de modo que a minha viagem não os prejudicaria. Por várias razões, inclusive os de escola para a nossa filha, Cláudia, escolhemos Berkeley de novo. Assim sendo, no início de 1979, embarcamos Cláudia, Leny e eu, para Berkeley.

Em fevereiro de 1979, houve um Congresso sobre valores próprios do Laplaciano, na Universidade de Hawai. Lá reencontrei velhos amigos (Chern, Cheeger, Eells, Kazdan, Lawson, Osserman, Warner etc.) e conheci novos geometras que haviam aparecido nos últimos anos. Conversei com vários matemáticos sobre o problema que havia proposto em Helsinki e que, no momento, ocupava as minhas atenções.

Logo que voltei a Berkeley, fiz uma exposição sobre estabilidade no Seminário do Chern. Mencionei o problema de Helsinki e o resultado particular que havia obtido com A. Magalhães. Depois da exposição, fui procurado por C. K. Peng, um matemático chinês que estava passando um ano em Berkeley, interessado nos problemas que eu havia apresentado e que achava que "tinha algumas idéias". Começamos a trabalhar em colaboração. Embora ele tivesse algumas dificuldades com o inglês, conseguíamos nos comunicar escrevendo coisas um para o outro. Verificamos que o problema de Helsinki podia ser dividido em dois casos, um dos quais (que deveria ser o mais difícil) sabíamos resolver. Estudamos

também as hipersuperfícies estáveis do  $R^n$  com curvatura total de crescimento polinomial.

Em abril de 1979 soube que Richard Schoen, um jovem e brilhante geômetra que eu havia conhecido no Hawaí, tinha umas idéias de como resolver o problema de Helsinki. Trabalhamos com afinco, Peng e eu, no caso que estava faltando e, em maio, tínhamos a solução completa. Como o Departamento gastaria 15 dias na datilografia e o artigo era curto, Leny fez a datilografia em dois dias. Neste meio tempo, recebi uma carta do Schoen dando detalhes sobre a sua idéia (que era diferente da nossa) e mencionando que aquele era um trabalho conjunto com D. Fisher-Colbrie. Fizemos a citação do fato, e enviamos o trabalho para o *Bulletin of A.M.S.* que o publicou neste mesmo ano. Este é um dos meus trabalhos mais citados.

Em julho de 1979, houve um Symposium em Berkeley para comemorar a aposentadoria do Chern. Ketí Tenenblat e Lucas Barbosa vieram especialmente para a ocasião. Lucas permaneceu em Berkeley por um mês e aproveitamos este mês para estudar as superfícies mínimas do  $R^n$  invariantes por grupos de movimentos rígidos. Obtivemos alguns resultados interessantes que foram publicados mais tarde nos Anais da Academia Brasileira de Ciências.

A partir de setembro, Peng foi para Princeton e fiquei trabalhando com Wu-Yi Hsiang. Naquele tempo, Hsiang estava entusiasmado com a idéia do que viria a se chamar a Geometria Equivariante, que é um método poderoso de construir exemplos. Iniciamos um ambicioso artigo que se chamaria "As Equações Fundamentais da Geometria Equivariante". Fizemos a parte básica do trabalho mas, até eu sair de Berkeley, não tínhamos conseguido nenhuma aplicação significativa. Depois que eu deixei Berkeley, me interessei por outras coisas, e o artigo nunca foi publicado.

Em novembro de 1979 compareci, como conferencista convidado, a um Congresso de Geometria em Berlin, onde apresentei uma conferência de uma hora sobre questões da estabilidade. A conferência foi publicada nos *Proceedings da Reunião*.

*Pedro: Você foi ganhador do prêmio de matemática concedido pela Academia de Ciências do 3º Mundo (TWAS) pelas suas contribuições ao estudo das superfícies mínimas e de curvatura média constante. Como você encara esta distinção?*

**Manfredo** Já falei sobre o meu trabalho em superfícies mínimas. Deixe-me dizer algumas palavras sobre curvatura média constante.

Em janeiro de 1981 visitei a Universidade do Ceará por um mês. Eu estava intrigado com o que acontece quando tentamos estender para superfícies de curvatura média constante certos resultados de superfícies mínimas. Em alguns casos, por exemplo, no Problema de Plateau, os resultados se estendem de maneira natural. Em outros casos, em particular nas questões de estabilidade, existem mudanças substanciais. Lucas se interessou pelo assunto e começamos a estudá-lo.

Cedo descobrimos que não havia na literatura recente uma definição adequada de estabilidade. Levou algum tempo para estabelecermos as definições apropriadas. A partir daí, obtivemos uma extensão, para curvatura média constante, do nosso primeiro teorema de estabilidade e o fato interessante que as esferas eram as únicas hipersuperfícies compactas de curvatura média constante e estáveis nos espaços euclidianos. Isto correspondia ao caso compacto do teorema obtido com o Peng. O caso completo era muito mais difícil e só seria resolvido anos mais tarde, para o caso de superfícies, na tese de Doutorado de Alexandre Magalhães da Silveira. O caso de dimensão maior do que dois continua em aberto.

O tópico de curvatura média constante tem sido o meu maior interesse de 1982 para cá. Com exceção de incursões na teoria da rigidez (em colaboração com Marcos Dajczer, 1986) e na geometria conforme (trabalhos em colaboração com M. Dajczer, 1982, 1987, sendo que um deles também com a colaboração de F. Mercuri, 1985), a maior parte do meu trabalho nos últimos dez anos foi em torno de curvatura média constante e suas ramificações. Ou tentando obter novos exemplos (em colaboração com M. Dajczer, 1982, 1983), ou estudando a influência da fronteira assintótica no comportamento de superfícies mergulhadas no espaço hiperbólico (em colaboração com Blaine Lawson, 1983, e com Jonas M. Gomes e G. Thorbergsson, 1986), ou estendendo o teorema de estabilidade da esfera para o caso em que o espaço ambiente tem curvatura constante (em colaboração com Lucas Barbosa e J. Eschenburg, 1988).

Quanto à minha reação pessoal, eu olho para este prêmio como um tributo à matemática brasileira. Foram três os matemáticos brasileiros já agraciados com o Prêmio de Matemática da Academia do Terceiro Mundo: o Professor Maurício Peixoto em 1986, o Professor Jacob Palis em 1988, e eu próprio em 1992. O prêmio vem sendo concedido anualmente desde 1986 e o universo de concorrência inclui todos os países da América Latina, da África, e da Ásia exceto o Japão.

Concorremos, portanto, com países como a Índia e a China. O fato que o Brasil seja, até agora, o país com o maior número de prêmios na área de matemática é um reflexo do extraordinário desenvolvimento da matemática brasileira nos últimos 30 anos.

*Pedro: Há tempo que seus trabalhos são sempre realizados em colaboração com colegas. Em certo sentido, você se antecipou ao costume atual de trabalhos conjuntos. Trata-se de um fato meramente circunstancial ou é o reflexo de algum traço específico de sua personalidade?*

**Manfredo.** Acho interessante que você tenha observado um fato que pouca gente nota. Comigo, tudo começou no meu Pós-Doutorado em Berkeley. Tive oportunidade de trabalhar com um grupo variado de matemáticos (Elon Lima, Frank Warner, Nolan Wallach, S.S. Chern e S. Kobayashi), e observei várias vantagens no trabalho em colaboração: 1) o trabalho se beneficia do conhecimento



dos outros colaboradores e talvez sequer fosse realizado por uma única pessoa; por exemplo, em um dos trabalhos com o Elon, utilizamos o método do gradiente, no qual o Elon era proficiente, junto com um resultado de Chern e Lasloff, com o qual eu estava bem familiarizado. 2) O trabalho adquire uma dinâmica própria e freqüentemente se estabelece aquilo que eu gosto de chamar “a alegria de fazer matemática”.

Como estávamos tentando estabelecer a pesquisa matemática no Brasil, achei que o sistema de colaboração aproveitaria melhor os nossos poucos recursos e seria um fator de unificação do grupo de geometria. Não sei se racionalizei tudo isso no início do processo, provavelmente não. Com o tempo, entretanto, foi ficando claro que esta era uma boa escolha.

*Pedro: Parece claro a existência de um imenso salto entre a produção científica da matemática brasileira e a quase ridícula qualidade do ensino de matemática no ensino secundário. O que você pensa disto? A comunidade matemática pode atuar neste problema?*

**Manfredo:** O salto que você menciona provém do fato que desenvolver a pesquisa matemática, com alta qualidade e volume limitado, é um problema mais simples do que melhorar o ensino secundário em geral (matemática é apenas um caso particular; aprende-se mal matemática, assim como se aprende mal português, geografia, história, etc). O problema tem outra dimensão e envolve um número imenso de variantes, ainda não adequadamente identificado. A título de exemplo, mencionarei algumas:

1) A organização de uma carreira digna e atraente para o professor de ensino básico.

2) A necessidade de uma rede pública de ensino de boa qualidade que reservasse a escola particular para um segmento da população de alta renda.

3) A escolha, e a realização em forma de textos, de um conteúdo apropriado para um cidadão médio de um mundo que vai se tornando cada vez mais competitivo.

Neste último item, o matemático, como tal, tem oportunidade de dar uma colaboração importante escrevendo de maneira simples e objetiva algum tópico de matemática elementar. A coleção IMPA-VITAE tem publicado vários textos deste tipo, alguns deles verdadeiras pérolas. Além disto, são bem conhecidos os cursos de reciclagem para professores do ensino secundário, organizados pelo Professor Elon Lima e outros colegas, com apoio da VITAE, e as Olimpíadas de Matemática da S.B.M. que vem contando com a colaboração de vários matemáticos e têm tido um efeito salutar no nível de ensino. Como somos poucos, isto parece uma gota d'água no imenso mar de problemas do ensino da matemática. Engano. O que tem sido feito é um trabalho consistente com uma tremenda ação multiplicadora.

Por outro lado, a questão de ensino da matemática em todos os níveis é importante para nós, pesquisadores em matemática, pela seguinte razão. Embora tenhamos uma pesquisa de boa qualidade, a sua quantidade é ainda muito pequena para as necessidades do país. Para ampliar a quantidade de pesquisadores em números competitivos com países de dimensões semelhantes às nossas, necessitamos, entre outras coisas (isto é apenas uma das condições), um ensino flexível e competente que saiba respeitar os interesses da maioria, para a qual a matemática será sempre um instrumento, e possa canalizar aquelas vocações matemáticas que brotam por toda parte.