Matemática Universitária Nº 17, dezembro de 1994, 56-58

A seção de problemas da RMU conta agora com dois editores: os professores Carlos Gustavo Moreira e Nicolau Corção Saldanha, ambos do IMPA.

Toda correspondência relacionada com esta seção deve ser dirigida a

Prof. Nicolau Corção Saldanha ou
Prof. Carlos Gustavo Moreira
RMU - Seção de Problemas
A/C Telma Ferreira Teixeira
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 Jardim Botânico
Rio de Janeiro - RJ.

• • •

Problemas Propostos

Problema 1. (Proposto por Carlos Isnard)

Considere o conjunto **C** dos números complexos, com a soma usual e com uma multiplicação $M : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, tal que para todo $r \in \mathbf{R}$ e todo $z \in \mathbf{C}$ vale $M(r,z) = rz$ (usual) e $M(i,i) = a + bi$, a e b reais dados. Com essas operações **C** é um anel comutativo. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

a) **C** é um corpo.

b) $a < \dfrac{b^2}{4}$

c) Existe $z \in \mathbf{C}$ tal que $M(z,z) = -1$.

d) Para todo $w \in \mathbf{C}$ existe $z \in \mathbf{C}$ tal que $M(z,z) = w$.

e) Para todo $w \neq 0$ e todo $z \neq 0$ em **C** vale $M(z,w) \neq 0$.

Problema 2. (Proposto por Carlos Gustavo Moreira e Juan Rivera)

Exiba um conjunto $X \subset R^n$, com dimensão de Hausdorff zero (em particular de medida nula), tal que para todo $A \subset R^n$, enumerável, exista $t \varepsilon R^n$ tal que $A + t \subset X$, onde $A + t = \{a + t \mid a \varepsilon A\}$.

Problema 3. (Proposto por Carlos Gustavo Moreira e Nicolau Saldanha)

Prove ou dê contra-exemplo: "Dado $X \subset R^2$, compacto de medida de Lebesgue positiva, existem $A,B \subset R$, ambos de medida de Lebesgue positiva, tais que $A \times B \subset X$"

Problema 4. (Proposto por Luiz Henrique de Figueiredo)

Prove que toda permutação é um ciclo ou um produto de dois ciclos.

Problema 5. (Proposto por Carlos Gustavo Moreira e Nicolau Saldanha)

Prove que para todo triângulo de lados inteiros e área racional, existe um triângulo congruente em R^2 cujos vértices têm coordenadas inteiras.

• • •

Soluções

Apresentamos a seguir soluções de problemas propostos no número 16 que nos foram enviadas por leitores da RMU. No próximo número completaremos as soluções dos problemas lá propostos, com outras soluções enviadas por leitores e, em último caso, com as soluções de seus propositores. Apresentaremos também soluções enviadas por nossos leitores para problemas propostos neste número.

Problema 4. RMU 16 (Solução enviada pelo Prof. Sérgio Rodrigues - UFSCar)

(a) Se $m \geq 0$ é inteiro então definimos o conjunto $A_{B,k,m} = \{n \in A_{B,k} : B^m \leq n < B^{m+1}\}$. Se $n \in A_{B,k,m}$ então n é escrito com m dígitos na base B e portanto $A_{B,k,m}$ tem menos de $(B-1)^m$ elementos. Então

$$\sum_{n \in A_{B,k}} \frac{1}{n} = \sum_{m \geq 0} \left(\sum_{n \in A_{B,k,m}} \frac{1}{n} \right) \leq \sum_{m \geq 0} \frac{(B-1)^m}{B^m} = B$$

(b) Vamos usar dois resultados: (1) Se $B = 10^r$ e se representamos um número $n \in N^*$ na base B por $n_B = (k^1\, k^2 \cdots k^p)_B$, com $0 \leq k^i < B$, e se representamos k^i na base 10 por k^i_{10} então $n_{10} = k^1_{10}\, k^2_{10} \cdots k^p_{10}$ (justaposição das seqüências). (2) Se P representa o conjunto dos números primos positivos então a série $\sum_{p_i \in P} \frac{1}{p_i}$ é divergente. (Allenby R.B.J.; et al. *Introduction to number theory with computation,* New York, Chapman and Hall. 1980. p. 57)

Se $k_{10} = (a_1\, a_2 \cdots a_r)$, $0 \leq a_i < 10$, e $B = 10^r$ então, por (a) e (2), existem infinitos primos $p \notin A_{B,k}$ e, neste caso, por (1), a representação decimal de p apresenta a seqüência k_{10} na sua representação decimal.

Problema 5. RMU 16 (Solução enviada pelo Prof. Sérgio Rodrigues - UFSCar)

Seja S um subconjunto dos inteiros e defina $K_7(S) = \{x \in R : x = \sum_{i \geq 1} a_i/7^i\; a_i \in S\}$. Se $S' = \{0,1,3\}$ então $K = K_7(S')$ é um conjunto compacto, $K + K = K_7(\{0,1,2,3,4,6\})$ é um conjunto de Cantor de medida zero e $K - K = K_7(\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\})$ é o intervalo fechado $[-1/2, 1/2]$.