

SEÇÃO DE PROBLEMAS

Matemática Universitária Nº 18, junho de 1995, 53-54

Toda correspondência relacionada com esta seção deve ser dirigida a

*Prof. Carlos Gustavo Moreira ou
Prof. Nicolau Corção Saldanha
RMU - Seção de Problemas
A/C Telma Ferreira Teixeira
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 - Jardim Botânico
Rio de Janeiro - RJ*

• • •

Problemas Propostos

Problema 1. (Proposto por Nicolau C. Saldanha)

Em uma festa com 24 pessoas foram tiradas várias fotos, sendo que em cada uma aparecem 8 pessoas. Cada conjunto de 5 pessoas aparece reunido em exatamente uma foto. Numerando as pessoas de 1 a 24, prove que se as pessoas 1 a 8 aparecem juntas em uma foto e as pessoas 9 a 16 aparecem em outra, então existe uma terceira foto onde aparecem as pessoas 17 a 24.

Problema 2. (Proposto por Carlos Tomei)

Se A e B são matrizes reais antissimétricas do mesmo tamanho, prove que todo autovalor não nulo de AB tem multiplicidade par (Isto é um fato conhecido mas vale a pena procurar uma demonstração 'esperta').

Problema 3. (Proposto por Nicolau C. Saldanha e Carlos Tomei)

Sejam A e B matrizes reais simétricas inversíveis com $A + B$ e $A^{-1} + B^{-1}$ também inversíveis. Defina $i(C)$ como o número de autovalores positivos de C . Mostre que $i(A) + i(B) = i(A + B) + i(A^{-1} + B^{-1})$.

Problema 4. (Proposto por Carlos Tomei, a partir de um problema de Paulo Cordaro)

No espaço S das funções Schwarzianas (suaves cujas derivadas tem decaimento 'rápido' no infinito), seja P o conjunto das funções sempre maiores ou iguais a zero.

a) Diga se para toda $f \in P$ existe $g \in S$ com $g^2 = f$.

b) Diga se existe $H : P \rightarrow S$ contínua com $(H(f))^2 = f$ para toda $f \in P$.