Matemática Universitária Nº 19, dezembro de 1995, 64-65

Toda correspondência relacionada com esta seção deve ser dirigida a

Prof. Carlos Gustavo Moreira ou
Prof. Nicolau Corção Saldanha
RMU - Seção de Problemas
A/C Telma Ferreira Teixeira
Estrada Dona Castorina, 110
22460-320 - Jardim Botânico
Rio de Janeiro - RJ

• • •

Problemas Propostos

Problema 1. (Proposto por Elon Lajes Lima)

Mostre que o volume V de um tetraedro de vértices A, B, C, D satisfaz a fórmula:

$$V^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{AB}^2 & d_{AC}^2 & d_{AD}^2 \\ 1 & d_{BA}^2 & 0 & d_{BC}^2 & d_{BD}^2 \\ 1 & d_{CA}^2 & d_{CB}^2 & 0 & d_{CD}^2 \\ 1 & d_{DA}^2 & d_{DB}^2 & d_{DC}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

onde d_{AB} é a distância entre A e B. Obtenha fórmulas análogas para dimensões superiores a 3.

Problema 2. (Proposto por Carlos Gustavo Moreira)

Encontre $A, B \subset \mathbf{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ com as seguintes propriedades:

(i) O número de elementos de $A \cap \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ é maior do que ou igual ao número de elementos de $B \cap \{0, 1, 2, \ldots, N\}$ para qualquer N.

(ii) $B + B = N$

(iii) $A + A + \ldots + A$ não é igual a N para nenhum número fixo de cópias de A.
(Definimos $C + D = \{ c + d \mid c \in C, d \in D \}$.)

Problema 3. (Proposto por Nicolau C. Saldanha)

Sejam $f_1, \ldots f_N : [0,1] \to \mathbf{R}$ funções integráveis tais que $\int_0^1 f_i\,(t)dt = 0$, para $i = 1, \ldots, N$. Mostre que existe um conjunto mensurável A, $A \subset [0,1]$, $|A| = \frac{1}{2}$, tal que $\int_A f_i\,(t)dt = 0$, para $i = 1, \ldots, N$.

Problema 4. (Proposto por Dario Tavares de Castro Neto)
Seja n um inteiro positivo. Defina

$$f_n(x) = \prod_{i=2}^{n} sen\left(\frac{\pi x}{i}\right) \quad \text{e}$$

$$g_n(x) = |sen(\pi x)|^{|f_n'(x)|}.$$

Mostre que g_n é contínua e que suas raízes no intervalo $(1, n]$ são exatamente os números primos menores do que ou iguais a n. Mostre ainda que $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = 1$ se $x > 1$ não é um primo.

Problema 5. (Proposto por Derek Hacon e Nicolau C. Saldanha)
Mostre que se duas altura de um tetraedro são concorrentes, as outras duas também o são.