

O Pêndulo de Foucault e Holonomia

MARCIO G. SOARES

1. Introdução

A visualização do conceito de transporte paralelo é uma dificuldade frequentemente encontrada por alunos cursando Geometria Diferencial pela primeira vez. Nessas notas de mini-curso (originalmente apresentadas durante o Colóquio Regional da SBM realizado na Universidade Federal de Viçosa em 1989) abordamos alguns aspectos matemáticos do pêndulo de Foucault, um exemplo físico muito ilustrativo da noção de transporte paralelo.

Um pêndulo de Foucault consiste de uma massa acoplada a um cabo de tal modo que esse sistema seja livre para oscilar ao longo de qualquer plano vertical. Como um tal pêndulo deve oscilar por longos períodos de tempo a massa deve ser grande, o cabo longo, o suporte bem lubrificado e construído de modo a permitir pivoteamento em qualquer direção.

Fixe um plano vertical e ponha o pêndulo a oscilar ao longo desse plano. A observação mostra que, após várias horas, o plano de oscilação do pêndulo precessa em torno do eixo vertical. Por exemplo, nos polos do planeta o pêndulo oscila num plano fixo no espaço enquanto a Terra gira sob ele.

À medida que a latitude decresce a precessão também decresce e no equador (uma geodésica da esfera) não se constata nenhuma precessão do plano de oscilação. Suponha que a Terra é uma esfera e acompanhemos o plano de oscilação do pêndulo ao longo de um círculo de latitude. A interseção desse plano com o plano tangente à esfera determina uma reta. Fixe uma reta inicial e ponha o pêndulo a oscilar. À medida que a esfera gira essa reta precessa e mostraremos que após uma volta completa sua posição é precisamente o transporte paralelo da reta inicial ao longo do círculo de latitude, ou seja, a *holonomia* desse círculo.

No que segue entendemos por *planeta*, notado \mathcal{P} , uma superfície orientável mergulhada no espaço euclidiano tri-dimensional \mathbf{E}^3 , sobre o qual atua um campo "gravitacional" normal \mathbf{G} , de módulo constante. O planeta será mantido fixo e um pêndulo de Foucault ideal será posto a oscilar sobre ele, sendo que o suporte do pêndulo descreve uma curva suave $\Gamma \subset \mathcal{P}$. Supomos que a equação de movimento de Newton é verdadeira num referencial ortonormal positivo $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ em \mathbf{E}^3 .

Todas as noções geométricas aqui utilizadas estão bem detalhadas em M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, USA (1976). Uma outra referência sobre o mesmo assunto, abordando o caso do planeta Terra, é devida a John Oprea, "Geometry and the Foucault Pendulum", American Math. Monthly vol. 102 number 6/June-July 1995, 515-522.

2. Referenciais em Movimento

Considere dois referenciais ortonormais, ambos com origem no ponto 0 do espaço tri-dimensional \mathbf{E}^3 , $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$, sendo que \mathcal{B}^* se move em relação a \mathcal{B} . A posição de uma partícula p é dada por:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 = x^*\mathbf{e}_1^* + y^*\mathbf{e}_2^* + z^*\mathbf{e}_3^*.$$

Observe que as derivadas em relação ao tempo não coincidem em ambos os referenciais pois, por exemplo, um vetor constante em relação a um deles não é constante em relação ao outro. Assim sendo, notamos por $\frac{d}{dt}$ e $\frac{d^*}{dt}$ as derivadas temporais em \mathcal{B} e \mathcal{B}^* , respectivamente.

Temos então :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt}\mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_3 \quad \text{e} \quad \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx^*}{dt}\mathbf{e}_1^* + \frac{dy^*}{dt}\mathbf{e}_2^* + \frac{dz^*}{dt}\mathbf{e}_3^*.$$

Por outro lado :

$$\begin{aligned} \frac{de_1^*}{dt} &= a_{11}\mathbf{e}_1^* + a_{12}\mathbf{e}_2^* + a_{13}\mathbf{e}_3^* \\ \frac{de_2^*}{dt} &= a_{21}\mathbf{e}_1^* + a_{22}\mathbf{e}_2^* + a_{23}\mathbf{e}_3^* \\ \frac{de_3^*}{dt} &= a_{31}\mathbf{e}_1^* + a_{32}\mathbf{e}_2^* + a_{33}\mathbf{e}_3^* \end{aligned}$$

e usando as relações $\langle \mathbf{e}_i^*, \mathbf{e}_j^* \rangle = \delta_{ij}$ e suas derivadas concluimos que a matriz $(a_{ij}(t))$ é anti-simétrica. Definimos o vetor *velocidade angular* \mathbf{a} por :

$$\mathbf{a} = a_{23}\mathbf{e}_1^* + a_{31}\mathbf{e}_2^* + a_{12}\mathbf{e}_3^*.$$

Então $\frac{de_i^*}{dt} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_i^*$, $i = 1, 2, 3$ e como

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{dx^*}{dt}\mathbf{e}_1^* + \frac{dy^*}{dt}\mathbf{e}_2^* + \frac{dz^*}{dt}\mathbf{e}_3^* + x^* \frac{de_1^*}{dt} + y^* \frac{de_2^*}{dt} + z^* \frac{de_3^*}{dt} = \\ &= \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + x^* \frac{de_1^*}{dt} + y^* \frac{de_2^*}{dt} + z^* \frac{de_3^*}{dt} \end{aligned}$$

obtemos a relação

$$(3) \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \mathbf{a} \wedge \mathbf{r}$$

entre as velocidades nos sistemas \mathcal{B} e \mathcal{B}^* . Em particular $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d^*\mathbf{a}}{dt}$. As acelerações estão então relacionadas por :

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^*\mathbf{r}}{dt} \right) + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \mathbf{r} + \mathbf{a} \wedge \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

e, usando (3), demonstramos o *Teorema de Coriolis* :

$$(4) \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} + \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) + 2\mathbf{a} \wedge \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \mathbf{r}.$$

O termo $2\mathbf{a} \wedge \frac{d^*\mathbf{r}}{dt}$ é conhecido como aceleração de Coriolis. Se a equação de movimento de Newton $\mathbf{F} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ vale no referencial \mathcal{B} então, no referencial \mathcal{B}^* , ela se traduz como :

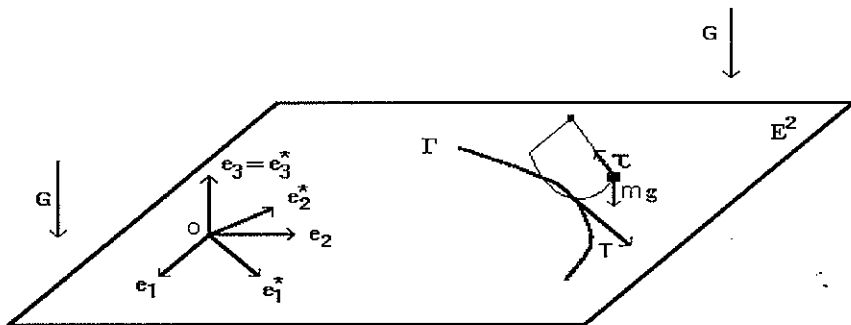
$$(5) \quad m \frac{d^{*2}\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) - 2m\mathbf{a} \wedge \frac{d^*\mathbf{r}}{dt} - m \frac{d\mathbf{a}}{dt} \wedge \mathbf{r}.$$

3. O Pêndulo de Foucault num Planeta Plano

Imagine um plano $\mathbf{E}^2 \subset \mathbf{E}^3$ sobre o qual atua um campo de força gravitacional constante e normal \mathbf{G} , ponha um pêndulo de Foucault ideal a oscilar nesse plano e suponha que o suporte do pêndulo se move ao longo de uma curva suave $\Gamma \subset \mathbf{E}^2$. Parametrize Γ pelo comprimento de arco, ao qual chamamos *tempo*, e suponha que a velocidade do suporte do pêndulo é, a cada instante, o vetor tangente unitário \mathbf{T} a Γ .

Considere $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ e $\mathcal{B}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*\}$, dois referenciais ortonormais satisfazendo : ambos têm a mesma origem $0 \in \mathbf{E}^3$, \mathcal{B} é fixo, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \wedge \mathbf{e}_2$ é normal ao plano, $\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3^* = \mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*$ e, a cada instante, \mathbf{e}_1^* é o vetor tangente unitário \mathbf{T} à curva Γ (veja figura).

Observe que, como $\mathbf{e}_1^* = \mathbf{T}$, temos que $\frac{d\mathbf{e}_1^*}{dt} = \kappa \mathbf{e}_2^*$ onde κ é a curvatura de Γ . O vetor velocidade angular a satisfaz $\kappa \mathbf{e}_2^* = \mathbf{a} \wedge \mathbf{e}_1^*$, portanto $\mathbf{a} = \kappa \mathbf{e}_3^* = \kappa \mathbf{e}_3$ e $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{d\kappa}{dt} \mathbf{e}_3 = \frac{d\kappa}{dt} \mathbf{e}_3^*$.



As forças agindo sobre o pêndulo são a tensão na corda, digamos t , e a força gravitacional $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, supondo que a massa do pêndulo é m . Logo, a força total agindo é $\mathbf{F} = t + m\mathbf{g}$ (veja figura).

Introduza agora um terceiro referencial ortonormal $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ tal que, a cada instante, os vetores e'_1 e e'_3 geram o plano de oscilação do pêndulo. Claramente o vetor velocidade angular de \mathcal{B}' em relação a \mathcal{B}^* é da forma $\mathbf{A} = A e_3 = A e_3^* = A e'_3$. Para determinar \mathbf{A} observe que, por (3)

$$\frac{d^* \mathbf{r}}{dt} = \frac{d' \mathbf{r}}{dt} + \mathbf{A} \wedge \mathbf{r}$$

e por (4)

$$\frac{d^{*2} \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt^2} + \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{r}) + 2\mathbf{A} \wedge \frac{d' \mathbf{r}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \wedge \mathbf{r}.$$

Com isto em mãos e por (5) concluímos que a equação de movimento de Newton no referencial \mathcal{B}' é :

$$m \frac{d'^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} - m \mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r}) - m \mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{r}) - 2m \mathbf{a} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{r}) \\ - 2m (\mathbf{a} + \mathbf{A}) \wedge \frac{d' \mathbf{r}}{dt} - m \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \wedge \mathbf{r}.$$

Os termos \mathbf{F} , $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{a} \wedge \mathbf{r})$, $\mathbf{A} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{r})$ e $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{A} \wedge \mathbf{r})$ estão todos no plano vertical contendo o pêndulo. Como não há precessão do plano de oscilação no referencial \mathcal{B}' , temos necessariamente :

$$(6) \quad 2(\mathbf{a} + \mathbf{A}) \wedge \frac{d' \mathbf{r}}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt} \right) \wedge \mathbf{r} \equiv 0.$$

Para oscilações muito pequenas podemos supor que $\mathbf{r} = r e'_1$ e daí $\frac{d' \mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} e'_1$ e (6) é equivalente a :

$$2(\kappa + A) \frac{dr}{dt} + \left(\frac{d\kappa}{dt} + \frac{dA}{dt} \right) r \equiv 0.$$

Essa última equação é satisfeita se, e somente se, $r^2(\kappa + A) = c$, onde c é uma constante. Mas, à medida que o pêndulo oscila, r assume o valor zero e isso força $c = 0$ e concluímos que $A = -\kappa$. Portanto, em relação ao referencial fixo \mathcal{B} , o plano de oscilação do pêndulo não precessa e, à medida que o tempo passa, todos esses planos são paralelos.

4. O Pêndulo de Foucault num “Planeta Arbitrário”

Suponha um planeta \mathcal{P} , mergulhado em E^3 , sobre o qual atua um campo de força gravitacional \mathbf{G} , normal e de módulo constante, com um pêndulo de Foucault ideal oscilando sobre \mathcal{P} , sendo que o suporte do pêndulo descreve uma curva suave $\Gamma \subset \mathcal{P}$. Novamente parametrize Γ pelo comprimento de arco, o *tempo*, e suponha que Γ nunca é tangente a uma direção assintótica de \mathcal{P} .

Considere a envoltória da família de planos tangentes a \mathcal{P} ao longo de Γ . Numa vizinhança de Γ , essa envoltória é uma superfície regular \mathcal{S} que é tangente a \mathcal{P} ao longo de Γ . Escolha uma vizinhança tubular de Γ em \mathcal{S} , de raio suficientemente pequeno, e recorde que transporte paralelo ao longo de Γ em \mathcal{P} equivale a transporte paralelo ao longo de Γ em \mathcal{S} . Se o raio da vizinhança tubular é suficientemente pequeno, podemos supor que o campo gravitacional \mathbf{G} é normal a ela e de módulo constante. Agora, essa vizinhança é uma superfície desenvolvível e localmente isométrica ao plano euclidiano. Dado um ponto $p \in \Gamma$, escolha uma vizinhança desse ponto que é isométrica a um aberto do planeta plano E^2 . Como foi visto na seção anterior, o plano de oscilação do pêndulo não precisa em E^2 . Portanto, considerando a reta de interseção do plano tangente a \mathcal{S} em p com o plano de oscilação do pêndulo, concluímos que essa reta será submetida a transporte paralelo ao longo de Γ à medida que o ponto p a percorrer.

Dep. Matemática - ICEx - UFMG
31270-901 - Belo Horizonte
msoares@mat.ufmg.br