MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
n$^{\underline{o}}$.22/23 – junho/dezembro 1997 – pp.53-56

Seção de Problemas

A correspondência relacionada com esta seção deve ser dirigida a

Prof. Carlos Gustavo Moreira ou Prof. Nicolau Corção Saldanha
RMU - Seção de Problemas
A/C Telma Ferreira Teixeira
Estrada Dona Castorina 110
22460-320 - Jardim Botânico - Rio de Janeiro - RJ

Soluções de problemas propostos

Problema 3, RMU 20/21. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função suave com um único ponto crítico que é um mínimo local. Pode-se afirmar que este mínimo local é o mínimo global?

Solução *(Alberto Sarmiento, Departamento de Matemática, UFMG):* Apresentamos um exemplo respondendo negativamente a esta questão, mas antes fazemos algumas observações.

Se $z = f(x, y)$ é um contra-exemplo então a função $z = -f(x, y)$ será um contra-exemplo para a questão analoga (isto é, quando o ponto crítico é máximo local). Para visualizar melhor o gráfico da função, consideraremos o caso do máximo local.

Se $p_0 \in \mathbb{R}^2$ é o único ponto crítico (máximo local) de $f = f(x, y)$, então para todo $q \in \mathbb{R}^2 - \{p_0\}$ o vetor gradiente $\nabla f(q)$ é não nulo. Logo as curvas de nível k de f, denotadas por $C_k = \{q \in \mathbb{R}^2 / f(q) = k\}$, decompõem $\mathbb{R}^2 - \{p_0\}$ numa união disjunta de curvas difeomorfas a círculos e/ou retas. Notamos que as curvas C_k são soluções da equação diferencial $\dot{X} = \nabla f^{\perp}(X)$, $X \in \mathbb{R}^2$, onde $\nabla f^{\perp}$ denota o vetor gradiente ortogonal.

Localmente, numa pequena vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ de p_0, as curvas de níveis $k < f(p_0)$ e suficientemente próximas de $f(p_0)$ são difeomorfas a círculos. Assim, reduzindo $\mathcal{U}$ se necessário podemos supor que para todo $q \in \mathcal{U} - \{p_0\}$ existe uma curva simples (isto é, sem auto-interseções) $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ com $\alpha(0) = p_0$ e $\alpha(1) = q$ que intercepta todas as curvas de nível transversalmente, ou seja, $\alpha'(t)$ não é paralelo a $\nabla f^{\perp}$ para todo $t \in (0,1]$).

Pelo teorema do valor médio temos que se $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ com $\beta(0) = p_0$ é uma curva simples e transversal às curvas de nível de f então $(f(\beta(t)))$ é uma função estritamente decrescente. Se supormos que para todo $q \in \mathbb{R}^2 - \{p_0\}$ existe uma curva com estas propriedades ligando p_0 a q segue que p_0 é um ponto de máximo global de f.

Assim, se $z = f(x,y)$ é um contra-exemplo, as curvas de nível de f devem decompor o plano em pelo menos duas regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ com $p_0 \in \mathcal{R}_1$ tais que para todo $q \in \mathcal{R}_2$ não existe uma curva simples transversal às curvas de nível e ligando p_0 a q. A decomposição do plano em linhas contínuas na figura 1 satisfaz esta propriedade e representará um contra-exemplo desde que possamos *integrar* a mesma; neste caso as linhas pontilhadas representarão o fluxo do campo gradiente correspondente.

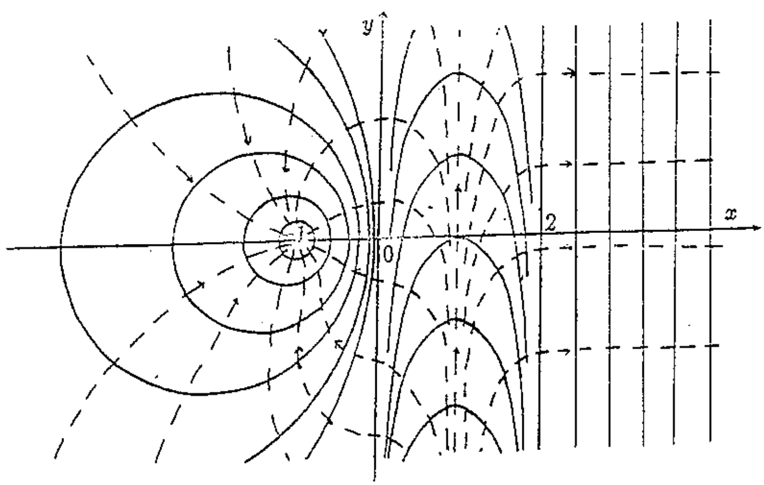

fig 1

Agora construiremos uma função cuja decomposição em curvas de nível é dada pela figura 1. Fixemos ϵ, com $0 < \epsilon < 1$, e consideremos as funções ϕ, ψ e η de classe C^{∞} e suas respectivas derivadas ϕ', ψ' e η', como na figura 2.

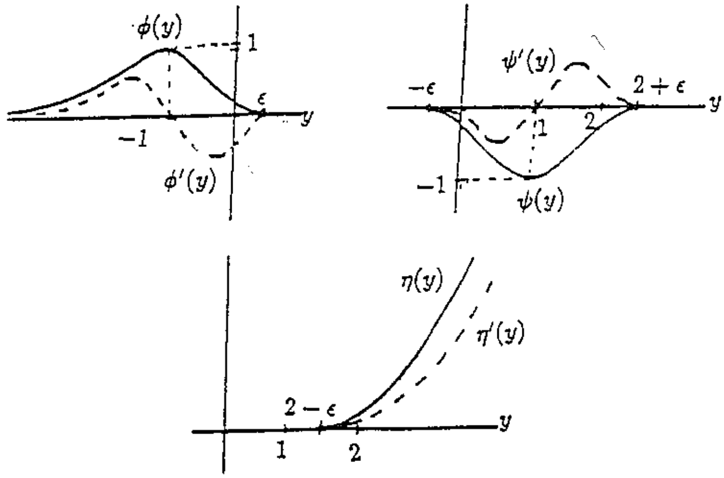

fig 2

A função desejada será

$$f(x,y) = \frac{\phi(y)}{1+x^2} + \frac{\psi(y)}{e^x} + \eta(y)$$

obviamente de classe C^∞ e satisfazendo às hipóteses do problema. Com efeito,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2x\phi(y)}{(1+x^2)^2} - \frac{\phi(y)}{e^x} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\phi'(y)}{1+x^2} + \frac{\psi'(y)}{e^x} + \eta'(y) = 0 \qquad (2)$$

Observando os gráficos de ϕ', ψ' e η' vemos que

$$\phi'(1) = \psi'(1) = \eta'(1) = \phi'(-1) = \psi'(-1) = \eta'(-1) = 0\ ,$$

donde as retas $y = \pm 1$ são soluções de (2). Como $\phi(-1) = 1,\ \psi(1) = -1$ e $\psi(-1) = \phi(1) = 0$, segue de (1) que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,1) = \frac{1}{e^x} \neq 0$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,-1) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

e esta última equação vale se e somente se $x = 0$. Logo o único ponto crítico de f é $(0, -1)$. Como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) = -2$$

e o discriminante

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, -1) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, -1) - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, -1) = -2\phi''(-1) > 0 ,$$

segue que $(0, -1)$ é máximo local de f. Notamos que para y suficientemente grande temos $f(0, y) > f(0, -1)$. O gráfico de f é mostrado na figura a seguir.

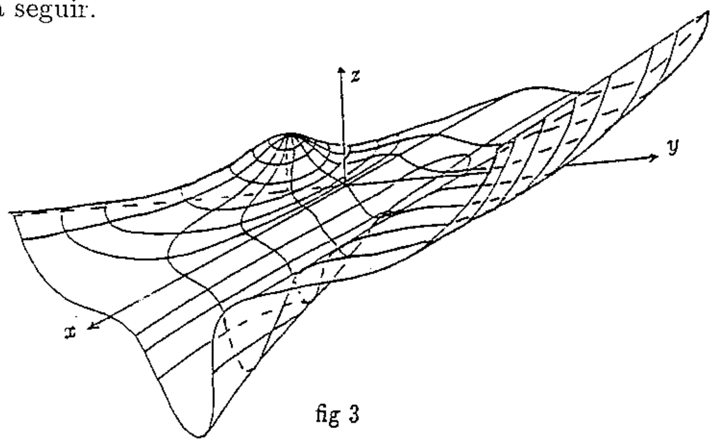

fig 3

Observamos que nossa construção depende da não existência de curvas simples transversais às curvas de nível de f. Isto está diretamente ligado à existencia da *componente de Reeb*, que é a faixa $[0, 2] \times \mathbb{R}$ na figura 1, com a decomposição por parabolas assintóticas às retas $\{0\} \times \mathbb{R}$ e $\{2\} \times \mathbb{R}$. Assim, para qualquer contra-exemplo f, a decomposição de $\mathbb{R}^2$ pelas curvas de nível de f terá uma faixa difeomorfa à componente de Reeb. Por outro lado, uma função com um único ponto crítico que é um mínimo (ou máximo) local e cuja decomposição em curvas de nível contenha uma componente de Reeb não é necessariamente um contra-exemplo; é fácil exibir um tal exemplo seguindo a construção anterior.

Finalmente, a função $f(x, y) = e^{3x} - 3e^{x}y + y^3$ é un contra-exemplo analítico à questão proposta. Fica como exercício para o leitor verificar este fato e encontrar a componente de Reeb na decomposição em curvas de nível de f.