

# A topologia em dimensão 2 e 3 versus álgebra pura e vice-versa

Alexandre Ananin

## 1 A álgebra pura

Primeiramente, o jogo de “par ou ímpar” em grupos finitos:

**Problema 1** *Sejam  $F$  um grupo finito arbitrário e  $a, b \in F$ . Mostre que o número*

$$N = |F| + \frac{|F|}{|a|} + \frac{|F|}{|b|} + \frac{|F|}{|ab|}$$

é par. Aqui  $|F|$  e  $|x|$  são as ordens de  $F$  e de  $x \in F$ .

De onde podemos esperar uma ajuda? São conhecidos os seguintes teoremas da Teoria de Grupos Finitos:

**Teorema de Lagrange** *Seja dado um grupo finito  $F$ . Então a ordem de cada subgrupo de  $F$  divide a ordem de  $F$ .*

Sejam  $F$  um grupo finito e  $p$  um número primo que divide a ordem de  $F$ . Para  $m > 0$  apropriado,  $p^m$  divide  $|F|$  e  $p^{m+1}$  não divide  $|F|$ . Cada subgrupo de ordem  $p^i$ ,  $0 \leq i \leq m$ , é dito  $p$ -subgrupo. Cada subgrupo de ordem  $p^m$  é dito  $p$ -subgrupo de Sylow.

**Teorema de Sylow** *Sejam dados um grupo finito  $F$  e um número primo  $p$  que divide  $|F|$ , a ordem de  $F$ . Cada  $p$ -subgrupo de  $F$  está incluído num  $p$ -subgrupo de Sylow. O número de todos os  $p$ -subgrupos de Sylow é 1 módulo  $p$ . Todos os  $p$ -subgrupos de Sylow são conjugados.<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>Dizemos que dois subgrupos  $S_1, S_2 \subset F$  são conjugados se existe  $g \in F$  tal que  $gS_1g^{-1} = S_2$ .

Seja  $F'$  o subgrupo gerado por  $a$  e  $b$ . Então

$$|F| + \frac{|F|}{|a|} + \frac{|F|}{|b|} + \frac{|F|}{|ab|} = \left( |F'| + \frac{|F'|}{|a|} + \frac{|F'|}{|b|} + \frac{|F'|}{|ab|} \right) \frac{|F|}{|F'|}$$

e podemos trabalhar só com o grupo  $F'$ . Assim suponhamos que  $F$  seja gerado por  $a$  e  $b$ . Caso  $|F|$  seja ímpar, não tem problema. Suponhamos que 2 divide  $|F|$ . Para  $m > 0$  apropriado,  $2^m$  divide  $|F|$  e  $2^{m+1}$  não divide  $|F|$ . Cada elemento  $x \in F$  tem ordem  $|x| = 2^i n$  com  $n$  ímpar e  $0 \leq i \leq m$ . Seja  $|a| = 2^{i_1} n_1$ ,  $|b| = 2^{i_2} n_2$  e  $|ab| = 2^{i_3} n_3$ . Caso  $i_1, i_2, i_3 < m$ , o número  $N$  é par. O mesmo é válido se exatamente dois dentre  $i_1, i_2, i_3$  são iguais a  $m$ . Por que a situação  $i_1 = i_2 = i_3 = m$  ou a situação  $i_1 = m, i_2 < m, i_3 < m$  não podem ocorrer?

Por (santa) simplicidade, suponhamos que  $i_1 = i_2 = i_3 = m$  e  $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ . (Talvez uma idéia apareça.) Neste caso, o subgrupo gerado por  $a$  é um 2-subgrupo de Sylow e o mesmo é válido para os subgrupos gerados por  $b$  ou  $ab$ . Pelo Teorema de Sylow,  $b = g_1 a g_1^{-1}$  e  $ab = g_2 a g_2^{-1}$  para  $g_1, g_2 \in F$  apropriados.<sup>2</sup> Excluindo  $b$ , obtemos  $ag_1 a g_1^{-1} = g_2 a g_2^{-1}$  ou, equivalentemente,  $h_1 a h_2 a h_3 = a$  para alguns  $h_1, h_2, h_3 \in F$  tais que  $h_1 h_2 h_3 = 1$  (onde  $h_1 = g_2^{-1}$ ,  $h_2 = g_1$  e  $h_3 = g_1^{-1} g_2$ ; de fato, tais  $h_i$ 's são elementos arbitrários de  $F$  satisfazendo a igualdade  $h_1 h_2 h_3 = 1$ ). Talvez as relações  $h_1 a h_2 a h_3 = a$  e  $h_1 h_2 h_3 = 1$  sejam impossíveis num grupo finito para um elemento  $a$  da ordem  $2^i$ ? Não, são possíveis:  $a = \begin{pmatrix} 123456 \\ 234165 \end{pmatrix}$ ,  $h_1 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 213546 \end{pmatrix}$ ,  $h_2 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 124536 \end{pmatrix}$ ,  $h_3 = \begin{pmatrix} 123456 \\ 215436 \end{pmatrix}$ .

Uma idéia: Se um grupo finito  $F$  contém  $S$ , um 2-subgrupo de Sylow cíclico, então  $F$  tem só um 2-subgrupo de Sylow! Realmente, com o uso deste fato, concluímos que cada um dentre  $a$ ,  $b$  e  $ab$  é um gerador de  $S$ . Agora  $b = a^n$ , com  $n$  ímpar, e  $ab = a^{n+1}$  tem ordem  $< 2^m$ .

Mas temos o exemplo seguinte: Sejam  $A$  e  $S$  grupos cíclicos de ordens  $2^m$  e 3 com geradores  $a$  e  $s$ . No conjunto  $F = A \times S$ , definamos a estrutura de grupo pela regra

$$(a^i, s^\alpha) \cdot (a^j, s^\beta) = (a^{i+j}, s^{(-1)^j \alpha + \beta}).$$

Temos  $|F| = 2^m \cdot 3$ . É fácil verificar que  $A_0 = \{(x, 1) \mid x \in A\}$ ,  $A_+ = \{(a^i, s^{(-1)^{i+1} + 1}) \mid i \in \mathbb{Z}\}$  e  $A_- = \{(a^i, s^{(-1)^i - 1}) \mid i \in \mathbb{Z}\}$  são 2-subgrupos de Sylow cíclicos.

Um beco sem saída ...

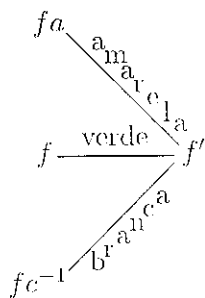
<sup>2</sup>Na verdade, o Teorema de Sylow dá só  $b^i = g_1 a g_1^{-1}$  e  $(ab)^j = g_2 a g_2^{-1}$  com  $i$  e  $j$  ímpares. Mas, por simplicidade, suponhamos que  $i = j = 1$  ...

## 2 É necessário atuar!

Há uma regra universal: Cada grupo deve atuar sobre algum objeto. Em outras palavras, cada grupo é um grupo das simetrias de uma "figura". Antes de fazer tal "figura", preparemos as condições do nosso problema de modo simétrico. Denotemos  $c = b^{-1}a^{-1} = (ab)^{-1}$ . Obtemos

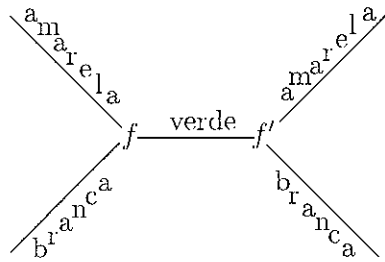
$$N = |F| + \frac{|F|}{|a|} + \frac{|F|}{|b|} + \frac{|F|}{|c|}$$

com  $abc = 1$ . Como a ação de  $F$  em  $F$  foi usada (na prova do Teorema de Sylow), definamos uma ação de  $F$  em  $F \cup F'$ , onde  $F' = \{f' \mid f \in F\}$  é uma cópia de  $F$ . Dizemos que os pontos de  $F$  são pares e os pontos de  $F'$  são ímpares. Para visualização, liguemos cada  $f \in F$  com  $f' \in F'$  pela aresta  $V$  de cor verde. Liguemos também cada ponto  $fa \in F$  com  $f' \in F'$  pela aresta  $A$  de cor amarela. Agora a ação de  $a$  em  $F$  é um caminho de tipo  $VA$  (primeiramente  $V$ , depois  $A$ ) e cada ponto de  $F \cup F'$  pertence a exatamente uma aresta verde e a uma aresta amarela. Para determinarmos a ação de  $c$ , liguemos cada ponto  $f \in F$  com  $(fc)' \in F'$  pela aresta  $B$  de cor branca. A ação de  $c$  em  $F$  é um caminho de tipo  $BV$  e cada ponto de  $F \cup F'$  pertence a exatamente uma aresta verde, a uma aresta amarela e a uma aresta branca. Além disso, é fácil verificar que a ação de  $b$  em  $F$  é um caminho de tipo  $AB$ .

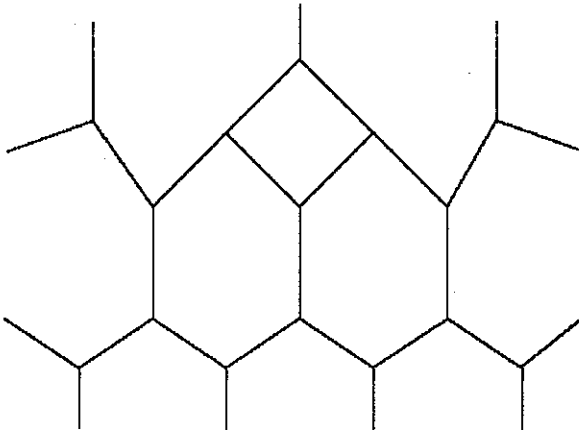


Eliminando todas as arestas brancas, obtemos  $\frac{2|F|}{2|a|}$  ciclos, cada um deles com  $2|a|$  vértices,  $|a|$  arestas verdes e  $|a|$  arestas amarelas. Da mesma maneira, eliminando todas as arestas verdes, obtemos  $\frac{2|F|}{2|b|}$  ciclos, cada um deles com  $2|b|$  vértices,  $|b|$  arestas amarelas e  $|b|$  arestas brancas. No fim, eliminando todas as arestas amarelas, obtemos  $\frac{2|F|}{2|c|}$  ciclos, cada um deles com  $2|c|$  vértices,  $|c|$  arestas brancas e  $|c|$  arestas verdes.

Localmente, temos a figura seguinte



que é plana, ou melhor, pelo menos tem uma representação plana. Qual idéia já se vislumbra? Podemos pensar em cada ciclo de duas cores como a borda de uma face (ou de um disco). Como temos a figura localmente plana, obtemos  $S$ , ... uma superfície conexa<sup>3</sup> compacta e sem borda:

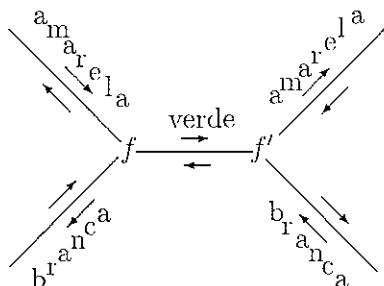


Provemos que  $S$  é orientável. Para isso, indiquemos os sentidos das arestas em cada face limitada por arestas de duas cores:

- Na face “verde-amarela”, cada aresta verde tem o sentido do ponto par ao ponto ímpar e cada aresta amarela tem o sentido do ponto ímpar ao ponto par
- Na face “branca-verde”, cada aresta branca tem o sentido do ponto par ao ponto ímpar e cada aresta verde tem o sentido do ponto ímpar ao ponto par
- Na face “amarela-branca”, cada aresta amarela tem o sentido

<sup>3</sup>Por que é conexa?

do ponto par ao ponto ímpar e cada aresta branca tem o sentido do ponto ímpar ao ponto par



Agora fica claro que um homem de dimensão 2 e tendo apenas a perna esquerda não pode retornar duma viagem em  $S$ , aparecendo com a perna direita, como é possível na fita de Möbius.

Calculemos  $\chi S$ , a característica de Euler de  $S$ , isto é, o número de vértices menos o número de arestas mais o número de faces. Como cada vértice pertence a três arestas, obtemos o número  $3 \cdot 2|F|$ , onde cada aresta aparece duas vezes. Assim temos  $3|F|$  arestas. Portanto<sup>4</sup>

$$\chi S = 2|F| - 3|F| + \frac{|F|}{|a|} + \frac{|F|}{|b|} + \frac{|F|}{|c|} = N - 2|F|.$$

É bem conhecido o fato simples: A característica de Euler de cada superfície conexa compacta orientável sem borda é par.

### 3 ... e vice-versa

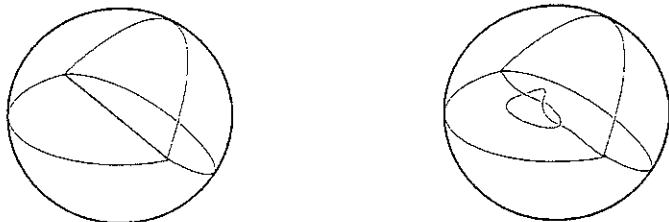
O aspecto principal de um problema começa quando o problema foi resolvido. Quais as raízes da argumentação que nos conduziram à solução? Podemos explorar as mesmas raízes para mais conhecimentos?

Consideremos o

**Problema 2.** Dada uma 3-bola  $B_0$  dividida nas três 3-bolas  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , da maneira seguinte: Denotemos por  $S_i$  a borda de  $B_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ . Suponhamos que duas dentre as  $S_i$ 's se intersectam num número finito de faces, três dentre as  $S_i$ 's se intersectam num número finito de

<sup>4</sup>Os que já estudaram, podem ver aqui a fórmula de Riemann-Hurwitz.

arestas e quatro dentre as  $S_i$ 's se intersectam num número finito de pontos. Seja  $I$  uma das arestas da intersecção  $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ . Pode  $I$  dar um nó não-trivial. (Para ter um nó, liguemos as extremidades de  $I$  em  $S_0$ .)



Podemos generalizar os resultados obtidos acima da maneira seguinte:

- Dado um conjunto finito  $M$  (de pontos; no caso considerado,  $M = F \cup F'$ )

- O grupo  $G$  gerado pelos  $n$  subgrupos  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  atua transitivamente sobre  $M$  e nenhum dentre  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  tem pontos fixos (no caso considerado,  $n = 3$  e ação de cada  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  se dá pela aresta de cor correspondente)

- Seja  $n = 4$ . Denotamos por  $G_i$  o subgrupo gerado por todos os subgrupos  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  menos o subgrupo de número  $i$  e denotamos por  $G_{ij}$  o subgrupo gerado por todos os subgrupos  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  menos os subgrupos de números  $i$  e  $j$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ ,  $i \neq j$ . Podemos considerar cada órbita de  $G_i$  em  $M$  como uma superfície, da maneira pela qual fizemos acima. Por exemplo, sejam  $i = 4$  e  $M'$  tal órbita. Calculemos a característica de Euler de  $M'$ :

$$\chi M' = |M'| - \frac{3}{2}|M'| + |M' : G_{12}| + |M' : G_{23}| + |M' : G_{13}|,$$

onde  $|M' : G_{12}|$ , por exemplo, denota o número de órbitas de  $G_{12}$  em  $M'$ . É fato conhecido que qualquer superfície tem característica de Euler  $\leq 2$  e só a esfera de dimensão 2 tem a característica de Euler 2. Portanto  $M'$  é a 2-esfera se e só se

$$-\frac{1}{2}|M'| + |M' : G_{12}| + |M' : G_{23}| + |M' : G_{13}| - 2 \leq 0. \quad (1)$$

Consideremos a igualdade:

$$\begin{aligned} |M : G_{12}| + |M : G_{13}| + |M : G_{14}| + |M : G_{23}| + |M : G_{24}| + |M : G_{34}| = \\ = |M| + |M : G_1| + |M : G_2| + |M : G_3| + |M : G_4| \end{aligned} \quad (2)$$

Tal igualdade é equivalente ao fato de que cada órbita de cada  $G_i$  é uma 2-esfera. Realmente, como cada órbita de  $G_{ij}$  aparece duas vezes (uma vez na órbita apropriada de  $G_i$  e outra na órbita apropriada de  $G_j$ ), a soma dos primeiros membros das desigualdades de tipo (1) é

$$\begin{aligned} -2|M| + 2|M : G_{12}| + 2|M : G_{13}| + 2|M : G_{14}| + 2|M : G_{23}| + 2|M : G_{24}| + \\ + 2|M : G_{34}| - 2|M : G_1| - 2|M : G_2| - 2|M : G_3| - 2|M : G_4|. \end{aligned}$$

Como esta soma é no máximo igual a 0, a igualdade (2) é equivalente à condição que cada órbita de cada  $G_i$  é uma 2-esfera.

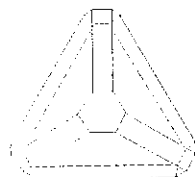
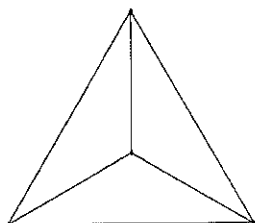
A partir de agora, (2) é verdadeira. Imaginemos cada órbita de cada  $G_i$  como a borda de uma 3-bola. Então obtemos a variedade conexa  $M$  de dimensão 3 compacta e sem borda.

**Observação.**  $M$  é orientável se e só se qualquer caminho cíclico de arestas tem comprimento par.

*Demonstração* Fica como exercício.

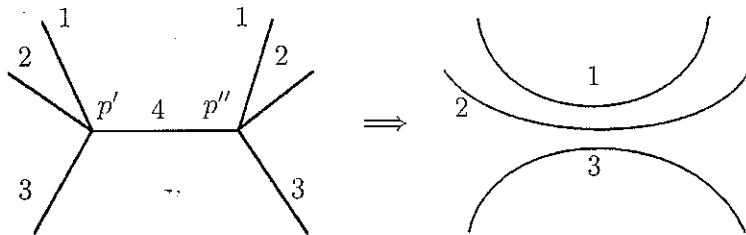
**Lema.** Toda variedade conexa de dimensão 3 compacta sem borda aparece nesta forma.

*Esquema da demonstração* Sabemos que qualquer variedade conexa de dimensão 3 compacta sem borda é "formada" por um número finito de tetraedros. Escolhamos dentro de cada tetraedro 24 pontos e 36 arestas de tipos 1, 2 e 3 como indicado na figura seguinte



Cada face do tetraedro tem 6 pontos associados: 2 pontos para cada aresta da face e 2 pontos para cada ângulo da face. Cada vértice do tetraedro também tem 6 pontos associados. Cada aresta de tipo 1 é paralela à aresta correspondente do tetraedro e liga os pontos associados à aresta do tetraedro. Cada aresta de tipo 2 liga dois de tais pontos associados a uma face do tetraedro e associados a um mesmo ângulo da face. Cada aresta de tipo 3 liga dois de tais pontos associados a um vértice do tetraedro, associados a uma mesma aresta do tetraedro e a faces diferentes do tetraedro. Cada triângulo na variedade é face de exatamente dois tetraedros. Liguemos por uma aresta de tipo 4 os pontos destes tetraedros associados à face, a um mesmo ângulo da face, e a um mesmo vértice comum dos tetraedros.<sup>5</sup>

Sejam  $p' \in M'$  e  $p'' \in M''$  pontos de órbitas diferentes de  $G_i$ . Se  $p'$  e  $p''$  estão ligados por aresta de tipo  $i$ , então podemos aplicar a transformação indicada na figura seguinte (caso  $i = 4$ )



A variedade nova é homeomorfa à variedade original. Depois de várias de tais transformações, obtemos a variedade inicial, mas com uma só órbita de cada grupo  $G_i$ . Em outras palavras, nossa variedade é quatro 3-bolas coladas. Abaixo tratamos apenas de tal situação:

- Dado um conjunto finito  $M$  (de pontos)
- O grupo  $G$  gerado pelos 4 subgrupos  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  atua sobre  $M$  e nenhum subgrupo  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  tem pontos fixos
- Cada  $G_i$  (subgrupo gerado por todos os subgrupos  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  menos o subgrupo de número  $i$ ) atua transitivamente sobre  $M$
- A igualdade

$$|M : G_{12}| + |M : G_{13}| + |M : G_{14}| + |M : G_{23}| + |M : G_{24}| + |M : G_{34}| = |M| + 4$$

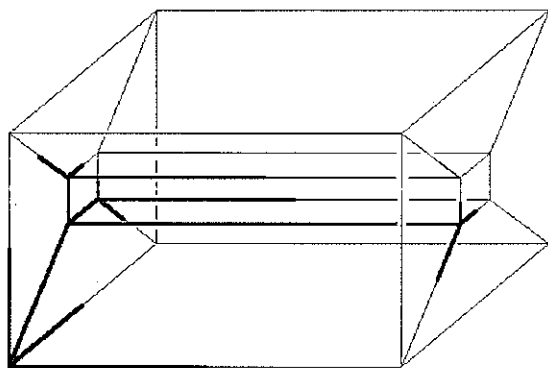
<sup>5</sup>Por que a característica de Euler de qualquer variedade conexa de dimensão 3 compacta sem borda é zero?



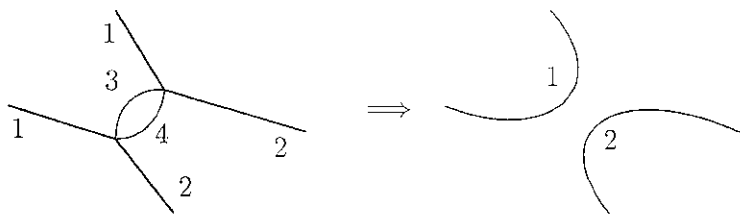
é válida ( $G_{i,j}$  é o subgrupo de  $G$  gerado por todos os subgrupos  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  menos os subgrupos de números  $i$  e  $j$ ,  $i, j = 1, \dots, 4$ ,  $i \neq j$ )

**Teorema.** *Sejam dadas duas variedades  $M_1$  e  $M_2$  nas formas descritas acima. Então  $M_1$  é homeomorfa a  $M_2$  se e só se, existe uma sequência de transformações, dos dois tipos indicados abaixo, que produza a descrição de  $M_2$  a partir da descrição de  $M_1$ :*

- Substituição da parte distinta do 4-cubo<sup>6</sup> pelo resto dele (as arestas paralelas têm o mesmo tipo)



- Substituição do fragmento do tipo indicado na figura



Agora o Problema 2 está resolvido: é fácil realizar um nó arbitrário na 3-esfera como caminho cíclico de arestas de tetraedros. Portanto temos o nó como caminho cíclico de arestas de tipos 1, 2, 3, 4. As transformações mencionadas no Teorema dão a possibilidade transformar este caminho em caminho de comprimento 4.

<sup>6</sup>O leitor tem idéia de por que o 4-cubo aparece?

**Agradecimento** O autor agradece ao Professor Silvio Pregnotatto pelas correções do estilo, o que lhe daria o direito de ser considerado co-autor do artigo. O único motivo pelo qual isso não ocorre é que o autor não gostaria de responsabilizá-lo pelas demais incorreções.

### Referências

1. M. Dehn, *Papers on Group Theory and Topology*, Springer-Verlag 1987
2. M. Ferri, C. Gagliardi, and L. Grasselli, *A graph-theoretical representation of PL-manifolds — A survey on cristallizations*, *Aequationes Mathematicae* **31** (1986) No. 2/3, p. 121-141.

*Departamento de Matemática*  
*IMECC - UNICAMP*  
*13083-970 - Campinas - SP*