SEÇÃO DE PROBLEMAS

MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 24/25 – junho/dezembro 1998 – pp. 73-74

Apresentamos abaixo os problemas da I Olimpíada Iberoamericana de Matemática, que teve lugar em 17 de setembro de 1998. Este material foi retirado da página das *Olimpíadas Colombianas de Matemáticas, Física y Computación*; recomendamos ao leitor interessado acessá-la no endereço `http://olimpia.uanarino.edu.co/oimu`.

Problema 1. Sejam f e g funções reais contínuas tais que $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx = 1$. Mostre que existe $c \in R$ tal que $f(c) + g(c) \leq 2$.

Problema 2. Seja E uma elipse com semieixos a e b. Determine o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos inscritos em E que têm pelo menos um de seus lados paralelo a um dos eixos de E, e calcule sua área.

Problema 3. Seja n um inteiro positivo e $1 = d_1 < d_2 < \ldots < n$ seus divisores ordenados em ordem crescente. Determinar n sabendo-se que

(i) $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$ e

(ii) $(d_5 + 1)^2 = d_{15} + 1$

Problema 4. Quatro círculos de raio 1 e com centros nos pontos A, B, C e D estão em um plano de tal modo que cada um é tangente a dois dos outros; um quinto círculo passa pelos centros dos dois deles e é tangente aos outros dois. Encontre os possíveis valores da área do quadrilátero $ABCD$.

Problema 5. Uma seqüência de polinomios é definida por $f_0(x) = 1$ e

$$(k+1)f_{k+1}(x) - (x+1)f_k(x) + (x-k)f_{k-1}(x) = 0$$

para $k \geq 1$. Mostre que $f_k(x) = 2^k$ para qualquer $k \geq 0$.

Problema 6. Considere a equação diferencial

$$3(3+x^2)\frac{dx}{dt} = 2(1+x^2)e^{-t^2} .$$

Se $x(0) \leq 1$, mostre que existe $M > 0$ tal que $|x(t)| < M$ para qualquer $t \geq 0$.

Problema 7. n linhas retas se moviam, cada uma paralela a uma direção dada e cada uma com sua própria velocidade constante (em particular, as retas não podiam dar marcha-a-ré). Estados originais desapareceram (quando sua área se tornou 0) e, no decorrer do tempo, é possível que outros estados tenham surgido.

Em um dado momento os chefes dos estados existentes decidiram terminar a guerra. Criaram a Organização das Nações Unidas, e todas as fronteiras pararam de se mover. A ONU contou o número de estados que foram destruídos e os existentes, e obteve um total de k. Mostre que

$$k \leq \frac{n^3+5n}{6} + 1 .$$

É possível obter-se a igualdade?

A correspondência relacionada com esta seção deve ser dirigida a
Prof. Carlos Gustavo Moreira ou Prof. Nicolau Corção Saldanha
RMU - Seção de Problema
a/c Telma Ferreira Teixeira
IMPA
Estrada Dona Castorina 110
22460-320 - Jardim Botânico
Rio de Janeiro - RJ