MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 26/27 – junho/dezembro 1999 – pp. 153-156

Problemas[1]

Prezado(a) leitor(a),

Devido a problemas de tradução e revisão, a Seção de Problemas do número 24/25 (junho/dezembro de 1999) da Matemática Universitária foi publicada com uma grande quantidade de erros. Segue abaixo uma versão corrigida dos problemas. As soluções devem ser enviadas para Claudio Landim, Impa - Estrada Dona Castorina, 110 - 22460-320 - Jardim Botânico - Rio de Janeiro - RJ.

Problema 1. (4 pontos) Sejam f e g funções reais contínuas tais que $\int_0^1 f^2(x)dx = \int_0^1 g^2(x)dx = 1$. Mostre que existe $c \in R$ tal que $f(c) + g(c) \leq 2$.

Problema 2. (5 pontos) Seja E uma elipse com semieixos a e b. Determine o lugar geométrico dos baricentros dos triângulos inscritos em E que têm pelo menos um de seus lados paralelo a um dos eixos de E, e calcule sua área.

Problema 3. (6 pontos) Seja n um inteiro positivo e $1 = d_1 < d_2 < \ldots < n$ seus divisores positivos ordenados em ordem crescente. Determinar n sabendo-se que

(i) $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$ e

(ii) $(d_5 + 1)^3 = d_{15} + 1$

[1]Seção coordenada por Carlos Gustavo T. A. Moreira e Nicolau C. Saldanha

Problema 4. (6 pontos) Quatro círculos de raio 1 e com centros nos pontos A, B, C e D estão em um plano de tal modo que cada um é tangente a dois dos outros; um quinto círculo passa pelos centros de dois deles e é tangente aos outros dois. Encontre os possíveis valores da área do quadrilátero $ABCD$.

Problema 5. (7 pontos) Uma seqüência de polinomios é definida por $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 1 + x$, e, para $k \geq 1$,

$$(k+1)f_{k+1}(x) - (x+1)f_k(x) + (x-k)f_{k-1}(x) = 0$$

Mostre que $f_k(k) = 2^k$ para qualquer $k \geq 0$.

Problema 6. (7 pontos) Considere a equação diferencial

$$3(3+x^2)\frac{dx}{dt} = 2(1+x^2)^2 e^{-t^2} .$$

Se $x(0) \leq 1$, mostre que existe $M > 0$ tal que $|x(t)| < M$ para qualquer $t \geq 0$.

Problema 7. (8 pontos) Há muito tempo atrás, quando o mundo era plano e tinha forma de disco, as pessoas viviam em paz e não havia fronteiras. Em um dado momento começou uma guerra mundial e apareceram Estados cujas fronteiras estavam definidas por n linhas retas que se moviam, cada uma paralela a uma direção dada e cada uma com sua própria velocidade constante (em particular, as retas não podiam dar marcha-a-ré). Estados originais desapareceram (quando sua área se tornou 0) e, no decorrer do tempo, é possível que outros estados tenham surgido.

Em um dado momento os chefes dos estados existentes decidiram terminar a guerra. Criaram a Organização das Nações Unidas, e todas as fronteiras pararam de se mover. A ONU contou o número de estados que foram destruídos e os existentes, e obteve um total de k. Mostre que

$$k \leq \frac{n^3 + 5n}{6} + 1 .$$

É possível obter-se a igualdade?

MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº26/27 – junho/dezembro 1999 – pp. 153-156

Problemas da II Olimpíada Iberoamericana de Matemática Universitária, realizada no dia 2 de outubro de 1999.

1. [**4 Pontos**] Determine a soma da série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(1-e^{-1})^k}{k}$.

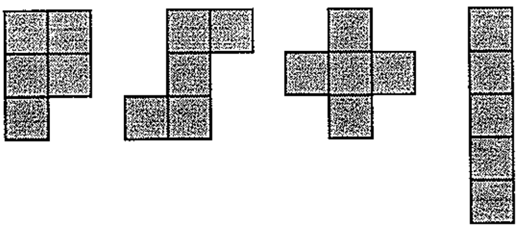
2. [**5 Pontos**] Os vértices do triângulo ABC pertencem à hipérbole $xy = 1$. Demonstre que seu ortocentro também pertence a essa hipérbole.

3. [**5 Pontos**] Sejam $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ todas as raízes reais do polinômio $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, sendo $n > 1$. Se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são todas as raízes do polinômio $g(x) = f(x) - xf'(x)$ e $z_1, z_2, \ldots, z_n$ são todas as raízes do polinômio $h(x) = f(x) + xf'(x)$, demonstre que essas raízes são reais e satisfazem

$$y_1 < 0 < z_1 < x_1 < y_2 < z_2 < x_2 < \cdots < y_n < z_n < x_n\,.$$

4. [**6 Pontos**] A soma de dois quadrados perfeitos consecutivos pode ser um quadrado perfeito: por exemplo, $3^2 + 4^2 = 5^2$. Encontre o menor inteiro $n > 2$ para o qual existem n números inteiros consecutivos tais que a soma dos seus quadrados seja um quadrado perfeito.

5. No jogo *tetris-5* são usadas peças de quatro tipos, que são pretas de um lado e brancas no outro, que são mostradas na figura abaixo:



As peças podem ser colocadas num tabuleiro quadriculado $n \times n$ em qualquer posição, desde que não se superponham e tenham o lado preto para cima.

a) **[2 Pontos]** Demonstre que é possível cobrir um tabuleiro 8×8 do qual foram retiradas as quatro casas dos vértices.

b) **[4 Pontos]** Demonstre que não se pode cobrir um tabuleiro 1999×2001 do qual foram retiradas as quatro casas dos vértices.

6. **[7 Pontos]** Seja $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ o conjunto dos números naturais, e seja $\mathbb{N}_m = \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Demonstrar que para qualquer função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_m$ existe um número real α tal que $[\alpha^n] \equiv f(n)\ (mod\, m)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nota: $[x]$ é o único inteiro tal que $[x] \leq x < [x] + 1$.

7. **[8 Pontos]** Em $\mathbb{R}^3$, define-se o produto "o" do seguinte modo:

$$(x, y, z)\, o\, (u, v, t) = (xu + yt + zv, xv + yu + zt, xt + yv + zu).$$

Demonstrar que para qualquer $k \in \mathbb{N}$, se $(x, y, z)^k = (0, 0, 0)$ então $x = y = z = 0$.

Nota: Define-se $(x, y, z)^k = (x, y, z)^{k-1}\, o\, (x, y, z)$ para qualquer inteiro $k > 1$, e $(x, y, z)^1 = (x, y, z)$.