

Percolação – um modelo simples (e interessante) para um meio poroso

Luiz Renato G. Fontes

Resumo

Apresentamos o modelo de percolação de elos para um meio poroso e discutimos alguns de seus resultados iniciais de forma elementar e, algumas vezes, heurística. Discutimos ainda, brevemente, extensões e modelos relacionados, entre os quais o modelo de Ising de um magneto.

1 Introdução

Na segunda metade da década de 1950, S.R. Broadbent e J.M. Hammersley[1] propuseram o seguinte modelo para um meio poroso. O meio é constituído de poros e canais que os ligam. Suponha que os poros e canais tenham uma disposição espacial regular, na forma de uma rede, de que os poros são os sítios e os canais são os elos. Um exemplo comum é \mathbb{Z}^d ou um seu subconjunto, onde $d = 1, 2, 3, \dots$ é a dimensão do meio, e seus elos ligando sítios vizinhos mais próximos. Suponha que cada canal esteja aberto ou fechado à passagem de um certo fluido e que esta característica seja atribuída de forma aleatória para cada canal, independentemente dos demais. Seja p a probabilidade de que um certo canal esteja aberto. Vamos supor que p é o mesmo para todos os canais. Temos assim o *modelo de percolação* de Broadbent e Hammersley. Eles tinham em mente $d = 2$ ou 3 , mas o modelo faz sentido e é matematicamente interessante em $d \geq 2$ ¹. Em $d = 3$, podemos imaginar o meio como sendo uma rocha (mergulhada em água), ou uma placa de rocha (sobre um depósito de óleo), ou ainda uma porção de pó de café numa cafeteira (com água quente por cima ou vapor de água por baixo). Em $d = 2$, este seria um modelo para a difusão de uma epidemia numa região povoada ou para a passagem de corrente através de um chip eletrônico.

¹O caso unidimensional também faz sentido, mas é menos interessante, como veremos.

Ao contrário do que ocorre com outros modelos probabilísticos para um movimento difusivo (como *passeios aleatórios* e *processos de difusão*), não é o movimento em si que é aleatório (num meio fixo). Aqui, o meio é aleatório.

A pergunta básica é sobre a probabilidade de haver *percolação* no meio, isto é, sobre a probabilidade de haver *caminhos* atravessando o meio formados apenas por canais abertos. Isto permitiria o transporte de fluido através do meio. É intuitivo que, como função do parâmetro p , a probabilidade de haver percolação é não decrescente. Como veremos adiante, para $d \geq 2$, esta função tem comportamentos *qualitativamente* diferentes para p próximo de 0 e p próximo de 1. Para qualquer p , é intuitivo que a probabilidade de haver percolação seja tanto menor quanto maior for o tamanho do meio. Em $d \geq 2$, para p próximo de 0, a probabilidade de haver percolação tende a 0 quando o tamanho do meio tende a infinito (e vale 0 quando o meio é representado por \mathbb{Z}^d todo). Para p próximo de 1, a probabilidade de haver percolação tende a um número positivo quando o tamanho do meio tende a infinito (e é positiva quando o meio é representado por \mathbb{Z}^d todo). A mudança de comportamento se dá num valor crítico do parâmetro p , denotado p_c , através do qual o modelo é dito exibir uma *transição de fase*. Nas próximas duas seções vamos (re)definir o modelo de forma um pouco mais abstrata e discutir esta questão mais a fundo. Na subsequente e última seção, discutiremos extensões do modelo acima e modelos relacionados.

Desde o trabalho pioneiro de Broadbent e Hammersley, modelos de percolação como o acima atraem o interesse do mundo acadêmico, em especial de matemáticos (mas também físicos, químicos, biólogos, engenheiros). Trata-se afinal de modelos bastante simples de serem formulados, mas, devido à estrutura espacial subjacente, cheios de problemas não triviais, que demandam novas idéias e técnicas (um dos mais populares dos quais, ainda em aberto, é provar se a probabilidade de haver percolação quando p toma o valor crítico p_c é positiva ou nula em $d = 3$). Outro fator de atração nos modelos de percolação é que eles se relacionam com outros sistemas espaciais aleatórios de interesse, como por exemplo o *modelo de Ising*, proveniente da Física Estatística. Esta relação permite usar resultados e métodos de um modelo no estudo do outro. Apresentaremos dois deste modelos na Seção 4 e os discutiremos e sua relação com o modelo de percolação brevemente. Um deles é o modelo de Ising; o outro é um modelo de crescimento, o *modelo de percolação de primeira passagem*.

Além da relação (quantitativa) com o modelo de Ising, há uma similaridade qualitativa mais genérica com este e outros modelos da Física Estatística, quanto ao comportamento do modelo no valor crítico. Há um grande interesse no entendimento de sistemas físicos em torno de valores críticos, ainda bastante incompleto no momento atual. Por exemplo, num gás, a transição gás-líquido na região dos parâmetros temperatura e pressão ou, num material magnético, a transição desmagnetizado-magnetizado conforme varia temperatura. Espera-

se chegar a um entendimento pelo menos qualitativo desta questão através de modelos que exibam comportamento crítico, por um lado, e que sejam (matematicamente) tratáveis, por outro. Ao lado de outros, os de percolação são bons candidatos a tais modelos.

[2] é uma referência para o material deste artigo e muito mais. Em português, entre o pouco que há na literatura matemática a respeito, vide [3].

2 O modelo de elos independentes

Nesta seção e na próxima, vamos considerar o modelo descrito na seção anterior em mais detalhes². O espaço subjacente é \mathbb{Z}^d .

Considere a rede hipercúbica em d dimensões ($\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d$) (denotada por um abuso de linguagem costumeiro por \mathbb{Z}^d), onde \mathbb{Z}^d é o conjunto de sítios da rede e $\mathbb{E}^d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d : \|x - y\|_1 = 1\}$ é o seu conjunto de elos³ (vizinhos mais próximos).

A cada elo de \mathbb{E}^d será atribuído aleatoriamente o status *aberto* ou *fechado* da seguinte maneira. Seja $\mathcal{X} := \{X_e, e \in \mathbb{E}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes com distribuição comum de *Bernoulli* com parâmetro p , isto é,

$$P_p(X_e = 1) = 1 - P_p(X_e = 0) = p$$

para todo $e \in \mathbb{E}^d$, onde p é um número real entre 0 e 1. $X_e = 1$ indica que o elo e está aberto (à passagem de fluido) e $X_e = 0$ indica que e está fechado. Vamos denotar por P_p a probabilidade subjacente ($P_{p,d}$, quando quisermos explicitar a dimensão) e por E_p a esperança.

Um conjunto de elos de \mathbb{E}^d , $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, $n \geq 1$, onde $e_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, será dito um *caminho* se x_1, x_2, \dots, x_n forem distintos e $y_i = x_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$ (não contém *circuitos*). Um caminho será dito *aberto* se todos os seus elos estiverem abertos (isto é, se $X_{e_i} = 1$, $i = 1, 2, \dots, n$). Diremos que dois sítios da rede, x e y , estão *conectados* (notação: $x \leftrightarrow y$) se existir um caminho aberto $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ com $x_1 = x$ e $y_n = y$. Dado \mathcal{X} , o espaço fica então dividido em conjuntos disjuntos de sítios conectados entre si, a que chamaremos *aglomerados*. Denotaremos por C_x o aglomerado a que pertence o sítio x e por C o aglomerado da origem.

C é um dos objetos básicos da teoria da percolação. Estamos interessados, por exemplo, em $|C|$, o volume do aglomerado da origem; mais precisamente, em sua distribuição (que, note-se, é a mesma que a de $|C_x|$ para todo sítio x , devido à invariância por translações de P_p). Especificamente, queremos saber se aglomerados infinitos ocorrem com probabilidade positiva.

²O material destas seções foi adaptado de [3]

³Passamos a nos valer da terminologia usual em teoria da percolação; usamos sítio em vez de poro e elo no lugar de canal.

Em dimensão 1, como já havíamos mencionado, o problema é trivial. Vamos agora ver porque. Se denotarmos por C_- e C_+ os sítios de \mathcal{C} à esquerda e à direita da origem, respectivamente, temos que $|C| = |C_-| + |C_+| + 1$ e que $|C_-|$ e $|C_+|$ são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $P_p(|C_+| \geq k) = p^k$. Logo, se $p < 1$, $P_p(|C_-| = \infty) = P_p(|C_+| = \infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} P_p(|C_+| \geq k) = 0$ e $P_p(|C| = \infty) \leq P_p(|C_-| = \infty) + P_p(|C_+| = \infty) = 0$. Portanto, com probabilidade 1, não há aglomerados infinitos em dimensão 1 quando $p < 1$. (É óbvio que $P_1(|C| = \infty) = 1$.) Vamos nos restringir então a $d \geq 2$.

Notemos antes de mais nada que $|C|$ é uma v.a. que pode assumir os valores $1, 2, \dots, \infty$. Uma quantidade de interesse será

$$\theta(p) := P_p(|C| = \infty).$$

Uma possível abordagem para estudá-la seria a partir de

$$\theta(p) = 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P_p(|C| = k).$$

Expressões para $P_p(|C| = k)$ são relativamente simples de calcular para k pequeno, mas se tornam combinatorialmente crescentemente complicadas para k crescente e não há uma forma explícita para k genérico. O estudo de $\theta(p)$ deverá seguir então uma outra linha, como veremos a seguir.

O primeiro resultado importante do modelo de percolação é aquele que estabelece a existência de uma transição de fase em 2 ou mais dimensões, como enunciado em seguida. Uma demonstração será apresentada na próxima seção.

Teorema 2.1 *Para $d \geq 2$, existe um valor crítico do parâmetro p , denominado p_c , no intervalo aberto $(0, 1)$ tal que*

$$\begin{aligned} \theta(p) &= 0, & \text{se } p < p_c \\ \theta(p) &> 0, & \text{se } p > p_c. \end{aligned}$$

3. Alguns resultados

Nesta seção, apresentamos primeiramente uma demonstração do Teorema 2.1, enunciado acima. Para isto vamos considerar o modelo em mais detalhe e explorar suas propriedades geométricas e de monotonicidade. Em seguida, apresentamos outros resultados importantes do modelo de forma abreviada, com alguns argumentos heurísticos.

Em auxílio à prova do Teorema 2.1, vamos discutir propriedades de monotonicidade da função $\theta(p)$. Para isto, faremos uma nova construção do modelo, usando outro tipo de variáveis aleatórias, de forma a ter todos os modelos de percolação, correspondentes a todos os valores de p possíveis, definidos no mesmo modelo. Chamaremos este modelo de *modelo padrão* e o descrevemos a seguir.

Seja $\mathcal{Z} := \{Z_e, e \in \mathbb{E}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes com distribuição comum uniforme em $[0, 1]$. \mathbb{P} denotará a probabilidade subjacente.

Um elo e da rede será dito *p -aberto* se $Z_e < p$ e *p -fechado* caso contrário. Podemos então construir o modelo de percolação com parâmetro p usando elos p -abertos e p -fechados deste modelo, da mesma forma como na seção anterior. Denotaremos por C_p o aglomerado de sítios conectados por elos p -abertos que contém a origem. Observe que C_p no modelo padrão tem a mesma distribuição de probabilidades do que C no modelo original com parâmetro p .

Lema 3.1 $\theta(p)$ é não-decrescente em p .

Prova

Em termos do modelo padrão, temos que $\theta(p) = \mathbf{P}(|C_p| = \infty)$. Por outro lado, $C_p \subset C_{p'}$ quando $p < p'$, o que é consequência de um elo p -aberto ser necessariamente p' -aberto. Concluimos que

$$\theta(p) = \mathbf{P}(|C_p| = \infty) \leq \mathbf{P}(|C_{p'}| = \infty) = \theta(p'). \quad \Delta$$

A monotonicidade em p estabelecida no lema acima nos permite definir o valor crítico da seguinte forma.

$$p_c = \sup\{p : \theta(p) = 0\} \tag{3.1}$$

Para o próximo resultado, monotonicidade na dimensão, vamos voltar ao modelo original (pois p está fixo). Note que podemos construir o modelo de percolação em d dimensões num hiperplano d -dimensional da rede $d + 1$ -dimensional contendo a origem, declarando fechados os elos ligando o hiperplano ao restante do espaço e usando \mathcal{X} para os demais elos. Denotando por \tilde{C} o aglomerado da origem neste modelo, temos claramente que $\tilde{C} \subset C$ e logo

$$\theta(p) := \theta(p, d) = P_{p, d+1}(|\tilde{C}| = \infty) \leq P_{p, d+1}(|C| = \infty) = \theta(p, d + 1).$$

Isto prova o seguinte.

Lema 3.2 $\theta(p, d)$ é não-decrescente em d .

Pelos dois lemas acima, torna-se suficiente, para provarmos o Teorema 2.1, mostrar os seguintes resultados.

Proposição 3.1 Para $d \geq 2$ e p suficientemente próximo de 0

$$\theta(p) = 0.$$

Proposição 3.2 Para $d = 2$ e p suficientemente próximo de 1

$$\theta(p) > 0.$$

Como veremos nas demonstrações destes resultados, abaixo, é suficiente no primeiro tomarmos $p < 1/(2d - 1)$ e no segundo $p > 2/3$.

Prova da Proposição 3.1

É suficiente mostrar que $\chi_p := E_p|C| < \infty$ para p próximo de 0, pois se $\hat{\theta}(p) = P_p(|C| = \infty) > 0$, então, claramente, $\chi_p = \infty$.

Podemos escrever

$$|C| = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{I}_{\{0 \leftrightarrow x\}},$$

onde \mathbf{I}_A é a função indicadora do evento A , isto é,

$$\mathbf{I}_A = \begin{cases} 1, & \text{se } A \text{ ocorrer} \\ 0, & \text{se } A \text{ não ocorrer,} \end{cases}$$

e logo

$$\chi_p = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_p(0 \leftrightarrow x).$$

Podemos reordenar a soma acima da seguinte forma

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{|\gamma|=n} P_p(\gamma \text{ está aberto}),$$

onde a segunda soma é sobre os caminhos γ partindo da origem e de comprimento n (isto é, caminhos $\gamma = \{e_1, \dots, e_n\}$ em que $x_1 = 0$). A probabilidade acima vale p^n independentemente de γ . Portanto temos que

$$\chi_p = \sum_{n \geq 0} \sigma(n) p^n, \tag{3.2}$$

onde $\sigma(n)$ denota o número de caminhos partindo da origem e de comprimento n .

Um argumento combinatório simples revela que, para $n \geq 1$,

$$\sigma(n) \leq 2d(2d - 1)^{n-1}.$$

De fato, o primeiro passo do caminho tem $2d$ possíveis sítios de destino, enquanto que a partir do segundo até o final, cada passo tem *no máximo* $2d - 1$ possíveis sítios de destino (devido à ausência de circuitos). Temos

$$\chi_p \leq \sum_{n \geq 1} 2dp[(2d - 1)p]^{n-1} + 1$$

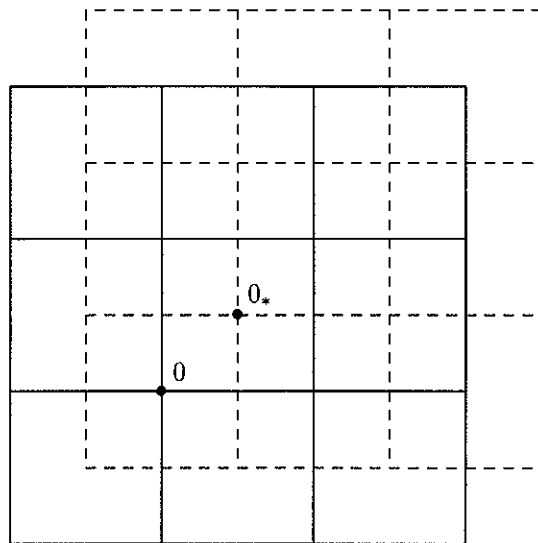
e para a série ser convergente, basta tomarmos $p < 1/(2d - 1)$. \triangle

Prova da Proposição 3.2

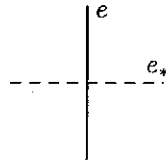
O argumento se baseia numa propriedade geométrica de \mathbb{Z}^2 . Consideremos a rede bidimensional *dual* de \mathbb{Z}^2 ,

$$\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + (1/2, 1/2).$$

\mathbb{Z}_*^2 é um deslocamento de \mathbb{Z}^2 por $1/2$ unidade em cada direção coordenada. Volumes finitos superpostos de \mathbb{Z}^2 e \mathbb{Z}_*^2 são ilustrados abaixo, o de \mathbb{Z}^2 em linhas cheias, linhas tracejadas para \mathbb{Z}_*^2 .



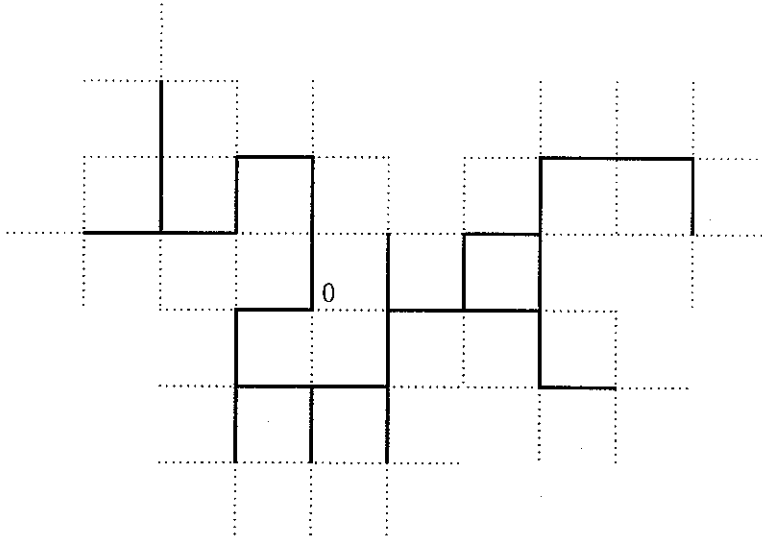
Note que há uma relação 1 a 1 entre os sítios e elos de \mathbb{Z}^2 e aqueles de \mathbb{Z}_*^2 , que associa e em \mathbb{Z}^2 ao elo secante a e , denotado e_* , em \mathbb{Z}_*^2 , como na figura a seguir.



Definiremos um modelo de percolação em \mathbb{Z}_*^2 , induzido pelo modelo em \mathbb{Z}^2 , declarando e_* aberto ou fechado conforme e esteja aberto ou fechado, respectivamente.

No que se segue, um *circuito* será um caminho $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ tal que $y_n = x_1$, isto é, um caminho que se fecha sobre si mesmo.

A ocorrência de um aglomerado da origem finito em \mathbb{Z}^2 está associada à existência de um circuito fechado (isto é, um circuito de elos fechados) na rede dual, ao redor da origem. Isto se deve ao fato de que se o aglomerado da origem for finito, os elos da fronteira do aglomerado (isto é, elos ligando sítios do aglomerado a sítios fora do aglomerado), obviamente fechados, estão sempre dispostos de tal forma que os elos correspondentes do dual formam um circuito, que será então fechado. A figura a seguir ilustra este fato geométrico elementar (o aglomerado da origem aparece em linhas cheias, sua fronteira em linhas pontilhadas e o circuito no dual em linhas tracejadas), cuja demonstração pode ser encontrada em [4].



Seguimos com a demonstração da Proposição 3.2.

Vamos mostrar que a probabilidade de o aglomerado da origem ser finito é estritamente menor do que 1 para p suficientemente próximo de 1. Para isto, em vista do fato geométrico acima, bastará argumentar que a probabilidade de haver algum circuito fechado na rede dual ao redor da origem é estritamente menor do que 1 para p suficientemente próximo de 1.

$$P_p(\text{há um circuito fechado na rede dual ao redor da origem}) \\ \leq \sum_{\gamma} P_p(\gamma \text{ está fechado}),$$

onde a soma é sobre todos os circuitos γ ao redor da origem. Ela pode ser reordenada da seguinte maneira.

$$\sum_{n \geq 4} \sum_{|\gamma|=n} P_p(\gamma \text{ está fechado}),$$

onde a segunda soma é sobre circuitos γ ao redor da origem de comprimento n .

Está claro que a probabilidade no interior das somas depende apenas de n e vale $(1-p)^n$. Portanto, a expressão acima fica

$$\sum_{n \geq 4} \lambda(n)(1-p)^n,$$

onde $\lambda(n)$ denota o número de circuitos na rede dual ao redor da origem de comprimento n .

O seguinte argumento produz uma cota superior útil para $\lambda(n)$. Qualquer circuito de comprimento n da rede dual ao redor da origem deve cruzar um elo da rede original da forma $((0, k), (0, k+1))$, para algum $-n/2 \leq k \leq n/2$. A partir deste elo secante, cada um dos $n-1$ elos subsequentes pode ser colocado de no máximo 3 maneiras diferentes. Por isto

$$\lambda(n) \leq n3^{n-1}.$$

Substituindo na soma acima, temos

$$\sum_{n \geq 4} \frac{n}{3} [3(1-p)]^n,$$

que é uma função contínua e decrescente em p quando $p > 2/3$, anulando-se em $p = 1$. Segue-se que existe $p_0 < 1$ tal que a expressão acima é estritamente menor do que 1 para $p > p_0$. \triangle

Uma melhoria do argumento acima, que mostra que $\theta(p) > 0$ se $p > 2/3$, é a seguinte. Denotemos por Q_M o quadrado centrado na origem e de lado

$2M + 1$. Seja A_M o evento que todos os elos de Q_M estejam abertos e B_M o evento em que há um circuito fechado na rede dual *completamente fora* de Q_M . Repetindo o argumento acima, temos

$$P_p(B_M) \leq \sum_{n \geq 8M+4} \frac{n}{3} [3(1-p)]^n.$$

Dado $p > 2/3$, esta expressão pode ser tornada estritamente menor do que 1 escolhendo-se M suficientemente grande, digamos M_0 . Portanto

$$P_p(B_{M_0}^c) > 0. \quad (3.3)$$

Agora, na intersecção dos eventos A_{M_0} e $B_{M_0}^c$, o aglomerado da origem é infinito. Além disso, A_{M_0} e $B_{M_0}^c$ são independentes, pois dependem de conjuntos disjuntos de elos. Logo, de (3.3) concluímos que

$$\theta(p) \geq P_p(A_{M_0} \cap B_{M_0}^c) = P_p(A_{M_0})P_p(B_{M_0}^c) > 0,$$

pois $P_p(A_{M_0}) > 0$ (ainda que próximo de 0). O argumento está completo.

A probabilidade crítica p_c depende da dimensão e podemos denotá-la $p_c(d)$. As proposições acima mostram que

$$\frac{1}{2d-1} \leq p_c(d) \leq \frac{2}{3}.$$

Para dimensões altas, sabemos que $p_c(d) \sim 1/2d$.

3.1 Outros resultados

3.1.1 Decaimento exponencial em $p < p_c$

Poderíamos definir outros pontos críticos no modelo de percolação. Por exemplo, lembrando que χ_p é o valor esperado do volume do aglomerado aberto da origem, seja

$$\bar{p} = \sup\{p : \chi_p < \infty\}. \quad (3.1.1)$$

A prova da Proposição 3.1 mostra que \bar{p} está bem definido e é positivo. É claro que $\bar{p} \leq p_c$ (pois se $\theta(p) = P_p(|C| = \infty) > 0$, então $\chi_p = \infty$).

O teorema abaixo, que estabelece o *decaimento exponencial* do raio de C , tem como consequência que $\bar{p} = p_c$, eliminando a existência de uma *fase intermediária* (\bar{p}, p_c) e estabelecendo a assim chamada *unicidade* do ponto crítico.

Sejam S_n a esfera L_1 em \mathbb{Z}^d de raio n com centro na origem, isto é

$$S_n = \{x \in \mathbb{Z}^d : \|x\|_1 \leq n\}$$

e A_n o evento de que existe um caminho aberto da origem à fronteira de S_n .

Teorema 3.1 *Se $p < p_c$, então para algum $\psi_p > 0$*

$$P_p(A_n) \leq e^{-\psi_p n} \quad \text{para todo } n. \quad (3.1.2)$$

Corolário 3.1.1 $\chi_p < \infty$ se $p < p_c$.

Observação 3.1.1 *Se $p > p_c$, então, obviamente, $\chi_p = \infty$. Prova-se também [2] que*

$$\lim_{p \uparrow p_c} \chi_p = \chi_{p_c} = \infty.$$

Prova do Corolário 3.1.1.

O Teorema 3.1 estabelece o decaimento exponencial da distribuição do raio de C , que denotaremos por $R := \max\{n : 0 \leftrightarrow x \text{ para algum } x \in S_n\}$. Como $|C| \leq (2R)^d$, de (3.1.2) concluímos que

$$P_p(|C| \geq n) \leq P_p(R \geq n^{1/d}/2) = P_p(A_{n^{1/d}/2}) \leq e^{-\psi'_p n^{1/d}}, \quad (3.1.3)$$

onde $\psi'_p = \psi_p/2$. Logo, $\chi_p = \sum_{n \geq 1} P_p(|C| \geq n) < \infty$. Δ

Observação 3.1.2 (3.1.3) *estabelece decaimento subexponencial da distribuição de $|C|$. Com um pouco mais de trabalho, mostra-se o decaimento exponencial desta distribuição (vide [2]).*

3.1.2 Unicidade do aglomerado infinito

A propriedade de *ergodicidade por translações*⁴ do modelo de percolação tem como conseqüência que, com probabilidade 1, existe um aglomerado infinito (em algum lugar) quando $\theta(p) > 0$. Ergodicidade quer dizer a grosso modo que pontos distantes são aproximadamente independentes. Como a probabilidade de um determinado sítio estar num aglomerado infinito não depende do sítio (pela invariância por translações), se ela for positiva, observarmos o tamanho do aglomerado de cada sítio de uma seqüência suficientemente esparsa até chegarmos num aglomerado infinito equivale (aproximadamente) a lançarmos sucessivamente uma moeda com probabilidade de cara $\theta(p) > 0$ até obtermos cara, o que ocorre com probabilidade 1.

A ergodicidade pode ser explorada mais a fundo para estabelecer que o aglomerado infinito é único (com probabilidade 1). Vamos definir por η a variável aleatória que conta o número de aglomerados infinitos distintos. Temos o seguinte resultado.

Teorema 3.1.1 *Qualquer que seja $p \in [0, 1]$,*

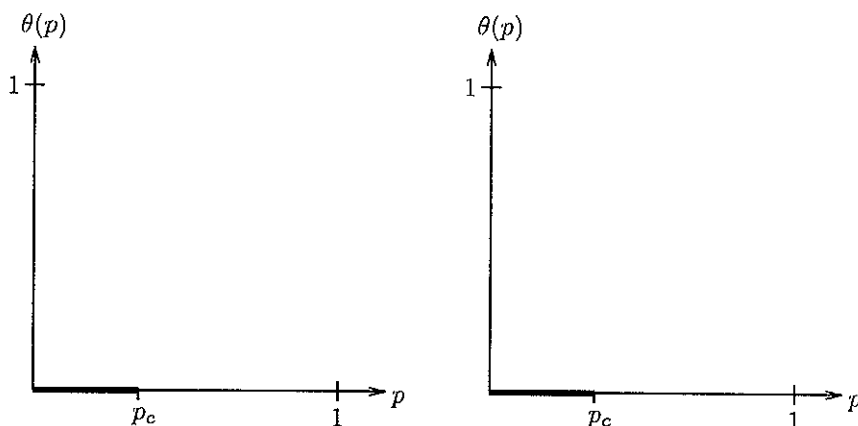
$$P_p(\eta = 0) = 1 \quad \text{ou} \quad P_p(\eta = 1) = 1. \quad (3.1.1)$$

⁴O que segue da independência e invariância por translações da distribuição de probabilidades subjacente.

Se $\theta(p) = 0$, então não é difícil de ver que vale a primeira alternativa. Se $\theta(p) > 0$, então $P_p(\eta \geq 1) = 1$ pelo fato mencionado no primeiro parágrafo anterior ao enunciado do Teorema 3.1.1. Aplicando o teorema, temos então que $P_p(\eta = 1) = 1$ quando $\theta(p) > 0$.

3.1.3 Continuidade no ponto crítico

O Teorema 2.1 não diz nada sobre o que acontece em $p = p_c$. Sabe-se por outro lado que $\theta(p)$ é uma função contínua, exceto possivelmente em $p = p_c$. Se $\theta(p_c) = 0$, então $\theta(p)$ será contínua e seu gráfico se parecerá com o da figura à esquerda a seguir. Caso contrário, o gráfico será mais parecido com o da figura à direita.



Qual caso vale é uma questão em aberto para d genérico, mas se acredita que $\theta(p)$ seja contínua. Isto está de fato provado em 2 dimensões e em dimensões grandes.

Passamos a discutir breve e heurísticamente o caso bidimensional. A auto-dualidade da rede \mathbb{Z}^2 permite mostrar que $p_c = 1/2$ e $\theta(p_c) = 0$. Consideremos de novo, como na demonstração da Proposição 3.2, a rede bidimensional dual de \mathbb{Z}^2 ,

$$\mathbb{Z}_*^2 = \mathbb{Z}^2 + \{1/2, 1/2\}.$$

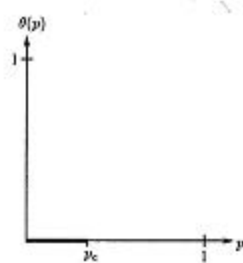
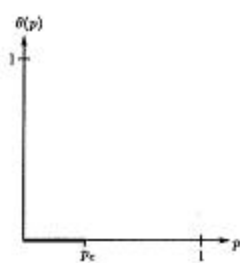
\mathbb{Z}_*^2 é isomorfa a \mathbb{Z}^2 (por isto dizemos que \mathbb{Z}^2 é auto-dual).

Teorema 3.1.2 Em duas dimensões, $p_c = 1/2$ e $\theta(p_c) = 0$.

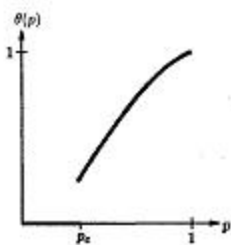
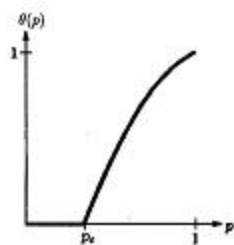
ERRATA

p.12

Onde se lê:



Leia-se:



A prova do Teorema 3.1.2 estabelece dois fatos. Um deles é que $\theta(1/2) = 0$, o que implica via (3.1) que $p_c \geq 1/2$. O outro é a desigualdade recíproca $p_c \leq 1/2$.

Um argumento heurístico para o primeiro é que, se $\theta(1/2) > 0$, então teremos um aglomerado infinito aberto em \mathbb{Z}^2 e um aglomerado infinito fechado em \mathbb{Z}_*^2 . Os dois aglomerados não podem se tocar (lembre que os elos de \mathbb{Z}_*^2 têm o mesmo status que os respectivos elos secantes de \mathbb{Z}^2 — vide a demonstração da Proposição 3.2) e \mathbb{Z}^2 é pequeno demais para isto.

Para o segundo, a heurística é que em $p < p_c$, há apenas aglomerados finitos (ilhas) em \mathbb{Z}^2 num mar de elos fechados do dual. Presumivelmente estes formam um aglomerado infinito. Logo, $1 - p \geq p_c$ sempre que $p < p_c$, o que implica que $p_c \leq 1/2$.

Veja as referências indicadas para os argumentos rigorosos. Observe finalmente que em $d = 2$ o valor exato de p_c é conhecido. Este não é o caso em dimensões mais altas.

4 Extensões e modelos relacionados

Nesta seção, discutimos brevemente extensões ligeiras do modelo visto em algum detalhe nas duas últimas seções e, em duas subseções subseqüentes, dois modelos relacionados, o modelo de Ising e o modelo de percolação de primeira passagem.

Uma variante do modelo de elos acima é o modelo de sítios. Neste, são os sítios que estão abertos ou fechados. O interesse é em caminhos atravessando o meio e contendo sítios abertos apenas. Podemos então definir o aglomerado da origem como no modelo de percolação de elos.

Há ainda modelos mistos, em que elos e sítios estão abertos ou fechados independentemente dos demais com dadas probabilidades.

O comportamento de todos estes modelos é semelhante ao do modelo de elos, com ocorrência de transição de uma fase não-percolativa para uma fase percolativa conforme os parâmetros atravessam valores críticos.

Podemos também considerar todos estes modelos em outros tipos de rede (infinita regulares), por exemplo, a árvore de Cayley, com resultados semelhantes aos para \mathbb{Z}^d . Em algumas destas redes (com menos estrutura espacial, como a árvore de Cayley), o modelo é mais simples, e mais conhecido de forma rigorosa (vide [5] e material sobre percolação em árvores em [6]). Porém, um grande interesse está nos casos em que a rede exhibe estrutura espacial e dimensional físicas, como \mathbb{Z}^2 ou \mathbb{Z}^3 .

A seguir introduzimos e discutimos brevemente dois modelos espaciais de considerável interesse que guardam alguma relação com percolação. O primeiro é o popularíssimo modelo de Ising e o segundo é um modelo de crescimento,

menos conhecido que o primeiro, chamado *percolação de primeira passagem*. Veja outros modelos ligados ao modelo de percolação em [2].

4.1 O modelo de Ising

Os modelos de percolação vistos acima são alguns dentre tantos sistemas aleatórios com interações espaciais. O estudo destes tipos de modelo tem avançado bastante desde o início do século XX. Um dos primeiros modelos a serem tratados, um dos mais populares até hoje, foi o *modelo de Ising* de um magneto. A estrutura espacial é, como nos modelos de percolação, representada por uma rede, digamos \mathbb{Z}^d . Em cada sítio da rede, temos uma variável aleatória, representando o momento magnético, ou *spin*, naquele sítio. Simplificadamente, consideramos dois possíveis valores, $+1$ e -1 . As interações magnéticas que pretendemos modelar são descritas através de dependências estatísticas adequadas na distribuição de probabilidades conjunta das variáveis aleatórias. No caso do modelo de Ising *ferromagnético*, as interações entre os spins são positivas, isto é, spins vizinhos tendem a se alinhar. A distribuição de probabilidade de Gibbs abaixo tem esta propriedade. Vamos descrevê-la em termos de probabilidades condicionais para dadas *condições de fronteira*.

Denotemos por S_i a variável aleatória que indica o spin no sítio i e seja $S = \{S_i, i \in \mathbb{Z}^d\}$. Seja Λ um subconjunto finito de \mathbb{Z}^d e sejam $S_\Lambda = (S_i)_{i \in \Lambda}$ e $S_{\Lambda^c} = (S_i)_{i \in \Lambda^c}$ as coordenadas de S em Λ e $\Lambda^c = \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda$, respectivamente. De forma análoga, seja $s = \{s_i, i \in \mathbb{Z}^d\}$ uma *configuração* de spins, $s_i \in \{-1, +1\}$ para todo $i \in \mathbb{Z}^d$, e $s_\Lambda = (s_i)_{i \in \Lambda}$ e $s_{\Lambda^c} = (s_i)_{i \in \Lambda^c}$ as coordenadas de s em Λ e Λ^c , respectivamente. A distribuição (ou medida) de Gibbs de S condicionada em S_{Λ^c} é dada em termos da função

$$H_\Lambda(s_\Lambda | s_{\Lambda^c}) := -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j \in \Lambda \\ \|i-j\|=1}} s_i s_j - \sum_{\substack{i \in \Lambda, j \in \Lambda^c \\ \|i-j\|=1}} s_i s_j \quad (4.1)$$

pela seguinte expressão.

$$\mu(S = s | S_{\Lambda^c} = s_{\Lambda^c}) := \exp\{-\beta H_\Lambda(s_\Lambda | s_{\Lambda^c})\} \mathbf{I}_{\{S_{\Lambda^c} = s_{\Lambda^c}\}} / Z, \quad (4.2)$$

onde $\beta \geq 0$ é um parâmetro do modelo (interpretado como o inverso da temperatura) e $Z = Z_\Lambda(\beta, s_{\Lambda^c}) = \sum_{s_\Lambda} \exp\{-\beta H_\Lambda(s_\Lambda | s_{\Lambda^c})\}$ é um fator de normalização. O primeiro termo à direita em (4.1) é um termo de acoplamento entre os spins do *volume* Λ e o segundo termo é o termo de acoplamento com a fronteira, cuja configuração s_{Λ^c} está fixa. Note que os pesos $\exp\{-\beta H_\Lambda(s_\Lambda | s_{\Lambda^c})\}$ são tanto maiores quanto mais alinhados estiverem os spins em s . Isto introduz o tipo de interação desejada no modelo. Vide [7] ou, em português, [8] para maiores detalhes.

Uma questão central neste modelo é quantas medidas de Gibbs há satisfazendo (4.2) para todo $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ finito e (μ -quase) todo s . O parâmetro β

está fixo. Unicidade corresponde a o sistema estar *desalinhado* ou não sentir as condições de fronteira quando esta se afasta e vai ao infinito. Existência de pelo menos duas tais medidas, ao contrário, corresponde a o sistema estar *alinhado* ou sentir condições de fronteira suficientemente fortes a distâncias arbitrariamente longas. Em dimensão 1, o próprio Ising, nos anos 1920, provou que há unicidade para todo β . Anos mais tarde, Peierls mostrou que em $d \geq 2$ ocorre uma transição de fase em β , provando que existe um valor crítico β_c positivo tal que, se $\beta < \beta_c$, então há unicidade, e se $\beta > \beta_c$, então não há unicidade. Note que quanto maior β for, maior a tendência ao alinhamento e como há duas direções de alinhamento (positiva e negativa), quando o sistema se alinha, ele o pode fazer de duas formas, correspondendo a duas medidas de Gibbs diferentes.

Observe também a notável similaridade de comportamento crítico com o modelo de percolação, que exhibe ou não transição de fase nas mesmas dimensões. De fato, o argumento da prova do Teorema 2.1 que vimos atrás é muito semelhante ao argumento de Peierls para o modelo de Ising. Mais do que isto, há uma relação matemática entre os modelos (descoberta e explorada na década de 1970 e desde então). O modelo de Ising pode ser reexpresso em termos de um modelo de percolação de elos, o chamado *modelo de aglomerados aleatórios*. Alinhamento no primeiro modelo corresponde a percolação no segundo. Mais genericamente, toda quantidade do modelo de Ising pode ser reexpressa em termos de uma quantidade correspondente no modelo de aglomerados aleatórios. Apesar de os elos deste não serem independentes, é possível obtermos comparações por cima e por baixo com modelos de elos independentes. Desta forma, podemos, por exemplo, obter desigualdades para β_c em termos de p_c .

4.2 O modelo de percolação de primeira passagem

Encerramos a seção e o artigo apresentando um modelo de crescimento conhecido como *percolação de primeira passagem*. Trata-se de novo de um modelo de escoamento de um fluido num meio aleatório formado por canais e poros. Como de costume, tomamos uma rede regular, \mathbb{Z}^d . Introduzimos neste modelo uma noção de tempo ou dificuldade de passagem do fluido pelos canais (ou elos). A cada elo de $e \in \mathbb{Z}^d$, atribuímos uma variável aleatória T_e de uma família de componentes independentes e identicamente distribuídos e não negativos. T_e será o tempo necessário para o fluido atravessar o elo e . Dados dois sítios x, y de \mathbb{Z}^d e um caminho γ ligando-os, definimos $T_\gamma = \sum_{e \in \gamma} T_e$, o tempo necessário para o fluido percorrer γ , e

$$T_{xy} = \inf\{T_\gamma : \gamma \text{ é um caminho ligando } x \text{ a } y\},$$

o tempo necessário para o fluido injetado em x chegar a y .

Se injetarmos fluido na origem no instante inicial, no tempo t teremos uma região B_t atingida pelo fluido, que pode ser descrita como $B_t = \{x \in \mathbb{Z}^d : T_{0x} \leq t\}$.

Há diversas conexões deste modelo com o modelo de percolação. Por exemplo, se a distribuição de T_e for tal que $\Pr(T_e = 0) = p$, então B_0 é claramente o aglomerado da origem num modelo de percolação com parâmetro p . Veremos outra conexão abaixo.

Um dos objetos de estudo deste modelo é a *forma* (assintótica) de B_t . No que se segue, vamos considerar o *preenchimento* em \mathbb{R}^d de B_t , $\tilde{B}_t = B_t + [-1/2, 1/2]^d$.

Sob condições adequadas de momento da distribuição de T_e , temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.1 *Existe um conjunto \mathcal{B} não aleatório, convexo e com interior não vazio tal que ou*

(a) \mathcal{B} é compacto e

$$(1 - \varepsilon)\mathcal{B} \subset \frac{1}{t}\tilde{B}_t \subset (1 + \varepsilon)\mathcal{B}, \text{ eventualmente, com probabilidade 1}$$

para todo $\varepsilon > 0$, ou

(b) $\mathcal{B} = \mathbb{R}^d$ e

$$\frac{1}{t}\tilde{B}_t \supset \{x \in \mathbb{R}^d, \|x\| \leq M\}, \text{ eventualmente, com probabilidade 1}$$

para todo $M > 0$.

Não é difícil explicar (heuristicamente) que uma condição suficiente para a ocorrência de (b) é que $\Pr(T_e = 0) > p_c$, o valor crítico para ocorrência de percolação em \mathbb{Z}^d no modelo de elos independentes. De fato, levando-se em conta que acima de p_c existe um aglomerado infinito único de elos e para os quais $T_e = 0$, digamos \mathcal{C} , e que este aglomerado está *espalhado* por toda parte⁵, dado um ponto qualquer x de \mathbb{Z}^d , ele estará a uma distância de \mathcal{C} (essencialmente) independente de x . Para se ir de 0 a x num tempo (essencialmente) independente de x , vamos então primeiro de 0 a \mathcal{C} , gastando um tempo independente de x . Depois nos aproximamos de x sem sair de \mathcal{C} , logo instantaneamente. Em seguida, vamos até x , gastando um tempo (essencialmente) independente de x . Pode-se tornar este argumento rigoroso e de fato provar que $\Pr(T_e = 0) \geq p_c$ é necessário e suficiente para (b).

Não se conhece muito sobre \mathcal{B} no caso (a) além do enunciado no Teorema 4.2.1. Sabe-se que não é um círculo em geral. Há exemplos de distribuição

⁵Consequência da ergodicidade por translações do modelo.

de T_c para as quais pode-se mostrar que há partes da fronteira de \mathcal{B} que são planas. Na verdade, não se sabe a forma exata de \mathcal{B} em nenhum caso. Este é um notável problema em aberto neste modelo, para mais detalhes sobre o qual vide [9], uma boa referência também para o modelo de percolação.

Referências

- [1] Broadbent, S.R. e Hammersley, J.M., Percolation processes I. Crystals and mazes, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **53**, 629-641 (1957)
- [2] Grimmett, G.R., *Percolation*, Second edition, Springer (1999)
- [3] Fontes, L.R.G., Notas em Percolação, *Monografias de Matemática* **54**, IMPA/CNPq (1996)
- [4] Kesten, H., *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhäuser (1982)
- [5] Benjamini, Itai e Schramm, Oded, Percolation beyond \mathbb{Z}^d , many questions and a few answers. *Electronic Communications in Probability* **1**, 71-82 (1996)
- [6] Peres, Y., Probability on Trees: An Introductory Climb, *Lecture notes in Mathematics* **1717**, 193-280 (1999)
- [7] Thompson, C.J., *Mathematical statistical mechanics*, Princeton University Press (1979)
- [8] von Dreifus, H., Mecânica Estatística de Modelos Ferromagnéticos, *Anais do 19o. Colóquio Brasileiro de Matemática* (1993)
- [9] Kesten, H., Percolation theory and first-passage percolation, *Annals of Probability* **15**, 1231-1271 (1987)

Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Cx. Postal 66281 — 05315-970
São Paulo, SP — Brasil
lrenato@ime.usp.br