MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 28 – junho 2000 – pp. 103

Problemas[1]

Problema 1. Prove que existe $\alpha > 1$ tal que, para todo inteiro $K \geq 1$, $\{\alpha^K\} \in \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, onde $\{x\} := x - \lfloor x \rfloor$ é a parte fracionária de x.

Problema 2. Seja P o conjunto dos números primos, e $g : P \to \mathbb{N}$ a função que associa a cada primo $p \in P$ a menor raiz primitiva módulo p, $g(p) = \min\{g \geq 1 \mid \operatorname{ord}_p g = p - 1\}$, onde $\operatorname{ord}_p a = \min\{t > 0 \mid a^p = 1 \pmod p\}$.

Problema 3. Dados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n > 0$ definimos suas médias simétricas por:

$$m_1 = m_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, ,$$

$$m_2 = \left\{ \frac{1}{C_n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j \right\}^{1/2} ,$$

$$\ddots$$

$$m_k = \left\{ \frac{1}{C_n^k} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \alpha_{i_2} \cdots \alpha_{i_k} \right\}^{1/k} ,$$

$$\ddots$$

$$m_n = (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n)^{1/n} \, ,$$

onde $C_n^k = n!/k!(n-k)!$.

Prove que $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n$, e existem $i \neq j$ tais que $m_i = m_j$ se e só se $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$.

Problema 4. Prove que existe $K \subset R$ compacto, de interior vazio e de medida nula tal que não existem conjuntos $K_1, K_2, K_3, \ldots$ tais que a dimensão de Hausdorff de K_i é menor que 1 para todo i e $K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

[1] Seção coordenada por Carlos Gustavo T. A. Moreira e Nicolau C. Saldanha

ERRATA

p.103

Problema 2.

Onde se lê:

Seja P o conjunto dos números primos, e $g : P \longrightarrow \mathbb{N}$ a função que associa a cada primo $p \in P$ a menor raiz primitiva positiva módulo p: $g(p) = \min\{g \geq 1 \mid \mathrm{ord}_p\, g = p - 1\}$, onde $\mathrm{ord}_p\, a = \min\{t > 0 \mid a^t \equiv 1 \pmod p\}$.

Leia-se:

Seja P o conjunto dos números primos, e $g : P \longrightarrow \mathbb{N}$ a função que associa a cada primo $p \in P$ a menor raiz primitiva positiva módulo p: $g(p) = \min\{g \geq 1 \mid \mathrm{ord}_p\, g = p - 1\}$, onde $\mathrm{ord}_p\, a = \min\{t > 0 \mid a^t \equiv 1 \pmod p\}$. Prove que g é uma função ilimitada.