

## Resenhas de Livros<sup>1</sup>

Dynamical Systems and Semi-simple Lie Groups - Renato Feres,  
Cambridge Tracts in Mathematics

Julio Cesar Rebelo

A classe mais natural de sistemas dinâmicos corresponde as ações de um grupo  $G$  sobre o conjunto de classes laterais  $(G : H)$  onde  $H$  é um subgrupo de  $G$ . Um caso particular de grande importância ocorre quando  $G$  é um grupo de Lie e  $H$  é um subgrupo fechado, pois nesse caso o conjunto  $(G : H)$  adquire uma estrutura de variedade diferenciável que denotaremos por  $M$ . De maneira um pouco mais geral, se  $\Gamma$  é outro subgrupo de  $G$ , então obtemos uma ação de  $\Gamma$  sobre  $M$  simplesmente restringindo a ação de  $G$  ao subgrupo  $\Gamma$ .

O livro de Renato Feres tem como assunto principal o estudo das ações de  $\Gamma$  sobre  $M$ , obtidas como acima, no caso em que o grupo de Lie original  $G$  é semi-simples e o subgrupo  $\Gamma$  é discreto. Nós não tentaremos explicar a definição de grupo semi-simples, mas o exemplo mais básico é o grupo das matrizes  $n \times n$  de determinante 1. Por outro lado, mencionamos que o estudo de tais ações possui notáveis aplicações em Algebra, Geometria, Teoria dos Números, Equações Diferenciais etc. A título de exemplo, observamos que o “problema de compreender” as ações mencionadas acima contém o “problema de compreender” todas as variedades hiperbólicas de dimensão maior ou igual a 3.

---

<sup>1</sup>Seção coordenada por Sérgio Volchan

No final dos anos 70, G.A. Margulis fez profundas contribuições a essa teoria (em particular extendendo notáveis trabalhos já conhecidos), poucos anos depois R. Zimmer percebeu que os argumentos de Margulis envolvidos no chamado Teorema de Superrigidez, podiam ser aplicados em um contexto mais amplo. Assim Zimmer estabeleceu um notável teorema de Rigidez para ações de grupos  $\Gamma$  como acima. Desde então ações de subgrupos discretos de grupos semi-simples vem sendo intensivamente estudadas em contextos cada vez mais gerais e importantes resultados continuam sendo obtidos.

Parte em virtude de sua importância e de suas aplicações em diferentes ramos da Matemática (e até mesmo a Física), o bom entendimento das técnicas envolvidas nesses trabalhos requer considerável preparação matemática. Essa necessidade de "background" tem dificultado o acesso de alunos a esses interessantes desenvolvimentos.

O livro em questão se apresenta como a primeira introdução "didática" ao assunto. Note que, antes de Feres, havia essencialmente dois livros modernos sobre o assunto, um por Zimmer e outro por Margulis. Tratam-se de dois excelentes livros que se complementam em diversos aspectos, porém a leitura de ambos é uma tarefa bastante árdua.

Já Feres planejou seu livro para estudantes de doutorado e este pode ser coberto em 1 ano (dois cursos) ou em 1 semestre (um curso), dependendo da preparação anterior dos alunos.

A primeira parte do livro contém resumos de assuntos necessários aos desenvolvimentos posteriores. Assim o autor apresenta as definições e resultados fundamentais de Teoria Ergódica, da Teoria elementar de Grupos de Lie assim como da teoria (menos elementar!) de Grupos de Lie semi-simples. Também são discutidos grupos e ações algébricas que desempenham um papel fundamental para a segunda parte. Um aluno de doutorado que estude apropriadamente essa primeira parte já terá adquirido uma útil e sólida cultura matemática que sem dúvida deverá lhe servir no futuro (mesmo que ele venha a se interessar por outros assuntos).

A segunda parte do livro é decididamente mais avançada. Estudam-se teoremas ergódicos profundos (Birkhoff, Moore, Oseledec),

a propriedade T de Kazhdan, Teoria de Pesin é brevemente mencionada. Finalmente o livro culmina com provas do teorema de Margulis (dito de Superrigidez) e do teorema de Zimmer (dito Superrigidez para cociclos).

Trata-se de um belo livro no qual o autor soube apresentar bem diferentes aspectos do assunto e sobretudo soube “dosar” a quantidade de informação a ser incluída neste (note que vários resultados de central importância, incluindo alguns recentes, não são discutidos a fim de manter o livro em um formato adequado para um curso). As definições e os teoremas têm enunciados claros e o nível de generalidade utilizado também é o apropriado para um primeiro contato com os problemas. O autor fornece ao longo de todo o texto exemplos e exercícios que servem para guiar o entendimento do leitor.

Em resumo, recomendamos enfaticamente este livro a todos que queiram tomar contato seja com a teoria de ações de Grupos de Lie ou de Grupos Algébricos ou com Teoria Ergódica/Sistemas Dinâmicos de maneira geral.

### **Endereço Atual**

Clay Mathematics Institute  
IMS - Math. Tower  
State University of New York at Stony Brook  
Stony Brook N.Y. 11794-3660 U.S.A.  
jrebelo@math.sunysb.edu

### **Endereço Permanente**

PUC-Rio (Dept. Matematica)  
Rua Marquês de São Vicente 225 - Gávea  
Rio de Janeiro RJ Brasil  
CEP 22453-900  
jrebelo@mat.puc-rio.br