

# Dinâmica de funções unimodais

Artur Avila

## Resumo

Nesse artigo expositório consideraremos funções do intervalo sob o ponto de vista dinâmico. Nos fixaremos apenas sobre funções unimodais, em especial o exemplo básico, a família quadrática.

## 1 Introdução

One is struck by the complexity of this figure that I am not even attempting to draw. Nothing can give us a better idea of the complexity of the three body problem and of all of the problems of dynamics in general.

*Poincaré, sobre a descoberta de pontos homoclínicos (um fenômeno de dimensão maior que um).*

Certamente Poincaré ficaria surpreso pela complexidade das figuras que surgem no estudo de sistemas dinâmicos já em dimensão um.

### 1.1 Dinâmica unidimensional

Sistema dinâmicos é uma área muito ampla e não ambicionaremos dar definições demasiadamente gerais nesse artigo introdutório. Em particular não consideraremos ações de grupos gerais nem equações diferenciais e restringiremos nossa atenção a dimensão 1.

Entenderemos por sistema dinâmico simplesmente uma função contínua  $f$  definida em um intervalo da reta. O ponto de vista é o do entendimento do comportamento assintótico de iterados de  $f$ , ou seja

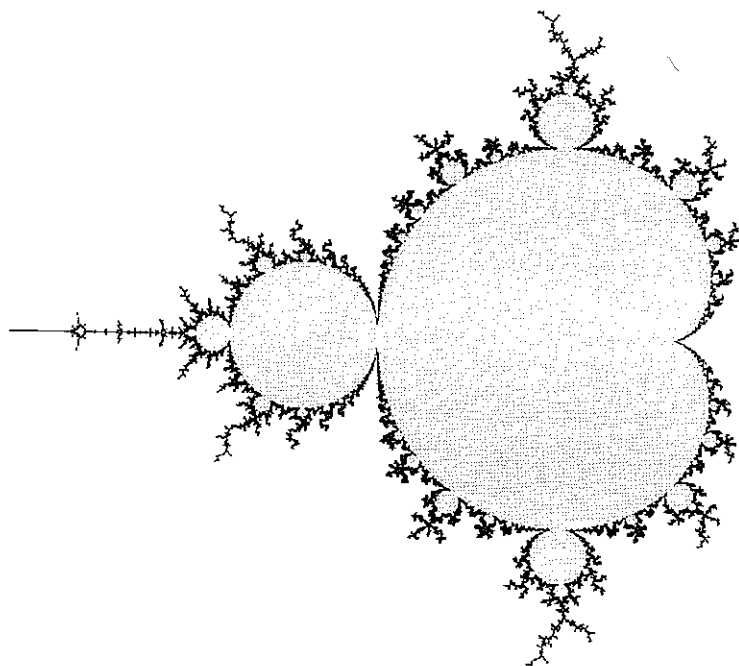


Figura 1: O conjunto de Mandelbrot é um dos objetos complexos relacionados com funções quadráticas.

consideraremos  $f^n = f \circ \dots \circ f$  e tentaremos entender suas propriedades para  $n$  grande.

Iniciaremos com um problema simples que servirá para introduzir alguns conceitos fundamentais num contexto autocontido, e a partir daí introduziremos a família quadrática e daremos uma idéia da complexidade desse exemplo e sua relevância no estudo de funções unimodais. Ao leitor que desejar um aprofundamento maior, antecipamos que algumas das técnicas relacionadas com o estudo de funções quadráticas e unimodais são as seguintes.

- EDP (deformação de estruturas conformes), teoria de Teichmüller.
- Análise complexa em dimensão infinita.
- Rigidez de objetos geométricos.

- Probabilidade.

Obviamente não cobriremos tais tópicos, optando por uma descrição de resultados. As técnicas descritas são em si problemas matemáticos de relevância independente.

## 2 Funções monótonas

Começemos com uma análise dinâmica de um problema simples. Qual é a solução de

$$x^{x^{x^{\dots}}} = 2?$$

A resposta habitual é ingenuamente substituir o expoente obtendo  $x^2 = 2$  e portanto  $x = \sqrt{2}$ .

No entanto pode-se contestar a solução observando que os mesmos passos levam a concluir que

$$x^{x^{x^{\dots}}} = 4$$

também teria como solução  $x = \sqrt{2}$ . Qual conclusão (se alguma) é a correta?

Uma pessoa prática pegaria uma calculadora de bolso e simplesmente calcularia

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\dots}}}$$

um número razoável de vezes e perceberia que de fato a primeira conclusão se sustenta.

Um matemático por sua vez possivelmente trataria as perguntas de uma maneira bem menos eficiente. Diante da primeira pergunta, o primeiro passo seria naturalmente interpretar seu significado. Uma interpretação razoável para o lado esquerdo da equação é  $\lim a_n(x)$  onde  $a_0 = 1$  e indutivamente  $a_{n+1}(x) = x^{a_n}$ .

Por indução verifica-se que  $a_n(\sqrt{2}) < 2$  para todo  $n$ . Como  $a_n$  é claramente monótona crescente conclui-se que possui um limite  $a \leq 2$ . Por continuidade o limite deve satisfazer  $a^{1/a} = \sqrt{2}$ , e portanto, após uma rápida análise,  $a = 2$ , confirmando o que a calculadora já sabia.

Após essa preparação, a segunda questão é facilmente respondida, a equação não tem solução, pois a solução teria que ser  $\sqrt{2}$  e como vimos  $\lim a_n(\sqrt{2}) = 2$ .

Podemos então generalizar a questão. Para quais valores de  $a$ ,  $\lim_n a_n(x) = a$  possui solução?

## 2.1 Funções crescentes, pontos fixos

Vamos responder essa questão usando alguns conceitos simples de sistemas dinâmicos. Introduzindo a notação  $f_x(y) = x^y$ , é claro que  $a_n(x) = f_x^n(1)$ . Introduziremos também a seguinte definição.

**Definição 2.1** *A órbita de um ponto  $x$  por  $f$  é o conjunto de iterados de  $x$ ,  $O_f(x) = \{f^k(x) | k \geq 0\}$ . O conjunto limite de um ponto  $x$  (associado a um sistema dinâmico  $f$ ) é o conjunto de pontos que são aproximados pela órbita de  $x$ , ou seja,  $\omega_f(x) = \{y | \liminf |f^k(x) - y| = 0\}$ .*

Observe que por continuidade,  $f(\omega_f(x)) = \omega_f(x)$ , ou seja, o conjunto limite é invariante por  $f$ .

Podemos então reenunciar o problema da seguinte maneira, dado  $a$ , existe  $x$  tal que  $\omega_{f_x}(1) = a$ ?

De nossas discussões anteriores, está claro que se a resposta for sim então  $x = a^{1/a}$ , ou equivalentemente  $x^a = a$ , ou seja  $a$  é um ponto fixo de  $f_x$ . Essa condição vem do fato de que o conjunto limite é invariante e sendo unitário nesse caso, tem que ser um ponto fixo.

Observando o gráfico de  $a^{1/a}$ , concluímos que  $f_x$  possui dois pontos fixos se  $1 < x < e^{1/e}$ , um deles menor que  $e$  e outro maior que  $e$ , um único ponto fixo se  $x = e^{1/e}$ ,  $e$ , e nenhum se  $x > e$ . Se  $a > 1$ , também temos que  $1 < a^{1/a} \leq e^{1/e}$ .

**Proposição 2.1** *Se  $1 < a$  e  $x = a^{1/a}$ ,  $\omega_{f_x}$  é o único ponto fixo de  $f_x$  menor ou igual a  $e$ .*

**Prova:** Seja  $p$  o ponto fixo com  $p \leq e$ . Observe que  $f_x$  é crescente, portanto como  $1 < p$ ,  $f_x^n(1) < p$  e  $\omega_{f_x}(1)$  é um ponto fixo de  $f$  menor ou igual a  $p$  e concluímos que  $\omega_{f_x}(1) = p$ . ■

Como  $a$  é um ponto fixo de  $f_x$ , concluímos que se  $1 < a$ , então  $\omega_{f_x}(1) = a$  se e somente se  $a \leq e$ .

Observe que a simplicidade do problema nesse caso vem de que se  $f$  é crescente, não há muitas possibilidades para o conjunto limite de um ponto, ou é um ponto fixo ou vazio. Nesse último caso dizemos

também que a órbita do ponto escapa para o infinito (infinito pode ser entendido literalmente no caso em que aplicamos, em geral escapar ao infinito significa não ter pontos de acumulação no domínio de definição do sistema dinâmico).

## 2.2 Funções decrescentes, pontos periódicos

O caso tratado antes não apresentou grandes dificuldades. De fato, funções crescentes não possuem muitas alternativas, os conjuntos limites são sempre ou um ponto fixo ou vazio (se a órbita escapa para o infinito).

Há algumas complicações adicionais se a função for decrescente, como veremos agora.

Pulando o caso  $a = 1$  que é trivial, consideremos agora  $0 < a < 1$  e analisemos quando existe  $x$  com  $\omega_{f_x}(1) = a$ . Como vimos, se a resposta for sim então  $x = a^{1/a}$  e portanto  $0 < x < 1$  nesse caso.

Como  $f_x$  é decrescente, a descrição é um pouco diferente. Há três possibilidades para o conjunto limite. Aproveitemos para introduzir uma nova definição.

Um ponto  $x$  é um ponto periódico de  $f$  se existe  $n > 0$  com  $f^n(x) = x$ , ou seja,  $x$  é um ponto fixo de  $f^n$ . Se  $n$  é mínimo com essa propriedade, dizemos que  $n$  é o período de  $x$ . Uma órbita periódica é a órbita de um ponto periódico, e coincide com o conjunto limite de qualquer de seus pontos.

**Proposição 2.2** *Seja  $g$  uma função decrescente. Então o conjunto limite de um ponto ou é vazio (a órbita escapa para o infinito) ou um ponto fixo de  $g$  ou uma órbita periódica de período 2.*

**Prova:** Observe que  $g^2$  é crescente, portanto para todo  $x$ ,  $\omega_{g^2}(x)$  ou é vazio ou um ponto fixo  $p$  de  $g^2$ . É claro que  $\omega_g(x) = \omega_{g^2}(x) \cup g(\omega_{g^2}(x))$ . Assim,  $\omega_g(x)$  é ou vazio (se  $\omega_{g^2}(x)$  for vazio) ou um ponto fixo (se  $p$  for um ponto fixo também de  $g$ ) ou  $\{p, g(p)\}$ . ■

Observe que no nosso caso, o intervalo compacto  $[x, 1]$  é invariante por  $f_x$ ,  $f_x([x, 1]) \subset [x, 1]$ , portanto  $\omega_{f_x}(1)$  nunca é vazio. Por outro lado, uma função decrescente tem no máximo um ponto fixo. Como  $a$  é um ponto fixo, o problema se reduz a encontrar os valores de  $a$  tais que  $\omega_{f_x}(1)$  não é uma órbita periódica de período 2.

Ao invés de fazermos uma análise complicada dos pontos periódicos de  $f_x$ , vamos introduzir uma ferramenta extremamente útil que simplifica bastante esse problema.

### 2.3 Derivada de Schwarz

**Definição 2.2** *A derivada de Schwarz de uma função  $C^3$   $f$  com um número finito de pontos críticos é dada por*

$$\frac{D^3 f}{Df} - \frac{3}{2} \left( \frac{D^2 f}{Df} \right)^2$$

*no complementar dos pontos críticos de  $f$ .*

Dizemos que  $f$  tem derivada de Schwarz negativa se  $Sf < 0$  no complementar dos pontos críticos. Veremos abaixo que essa é uma condição extremamente útil.

Pode-se imaginar que muitos outros operadores diferenciais dão informações interessantes sobre uma função. A razão de se usar a derivada de Schwarz vem do fato que ela se adapta ao estudo de sistemas dinâmicos por se comportar bem quanto a composição. Observe que

$$S(g \circ f) = Sg \circ f \cdot (Df)^2 + Sf$$

e portanto

$$S(f^n) = \sum_{k=0}^{n-1} Sf \circ f^k \cdot (Df^k)^2.$$

A condição da derivada de Schwarz negativa é portanto invariante, pois se  $g$  e  $f$  a satisfazem,  $g \circ f$  também a satisfaz. Outros operadores diferenciais sem boas regras de composição são menos interessantes, pois mesmo que verifiquemos alguma condição para  $f$ , não é imediato que isso se propague para seus iterados.

Em todo caso, no caso em que estamos trabalhando, é claro que  $f_x$  possui derivada de Schwarz negativa.

**Proposição 2.3** *Se  $f$  possui derivada de Schwarz negativa e  $J$  é um intervalo compacto sem pontos críticos e  $x \in J$  é tal que  $|Df(x)|$  é mínimo então  $x \in \partial J$ .*

A prova dessa proposição é um simples exercício.

**Proposição 2.4** *Suponha que  $Sf < 0$  e  $f$  possui 3 pontos fixos  $p_1 < p_2 < p_3$  sem pontos críticos entre eles (nesse caso  $f$  é automaticamente crescente). Então  $Df(p_2) > 1$ ,  $Df(p_1), Df(p_3) < 1$ . Se  $x \in (p_1, p_2)$  então  $f(x) < x$  e em particular  $\omega_f(x) = p_1$ . Analogamente se  $x \in (p_2, p_3)$ .*

**Prova:** Pelo teorema do valor médio, existe  $a \in (p_1, p_2)$  e  $b \in (p_2, p_3)$  tais que  $Df(a) = Df(b) = 1$ . Pela proposição anterior,  $Df(p_2) > 1$ , pois  $p_2 \in (a, b)$  e  $Df(p_1), Df(p_3) < 1$ , pois  $a \in (p_1, p_2)$  e  $b \in (p_2, p_3)$ .

Seja  $x \in (p_1, p_2)$ . Se  $f(x) \geq x$ , pelo teorema do valor médio há pontos  $c \in (p_1, x)$ ,  $d \in (x, p_2)$  com  $Df(c) \geq 1$ ,  $Df(d) \leq 1$ . Como  $d \in (c, p_2)$ , isso contradiz a proposição anterior. ■

Observe que no nosso problema  $f_x^2$  é crescente, e possui sempre um ponto fixo,  $a$ , que também é (o único) ponto fixo de  $f_x$ . Observe que  $Df_x(a) = \ln(x) \cdot x^a = \ln(x) \cdot a = \ln(a)$ .

**Proposição 2.5** *Se  $0 < a < 1/e$  então  $\omega_{f_x}(1) \neq a$ . Se  $1/e \leq a < 1$  então  $\omega_{f_x}(1) = a$ .*

**Prova:** Se  $0 < a < 1/e$ , temos que  $|Df_x(a)| > 1$ . Isso implica que existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que  $(a - \epsilon, a + \epsilon) \subset f_x(a - \epsilon, a + \epsilon)$  para todo  $\epsilon < \epsilon_0$ . Como  $f_x$  é injetiva, isso implica que se  $f_x(y) \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$  então  $y \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ . Por indução concluímos que se  $f_x^n(1) \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$  então  $1 \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ . Portanto  $\omega_{f_x}(1) \neq a$ .

Suponha que  $\omega_{f_x}(1) \neq a$ . Então sabemos que  $\omega_{f_x}(1)$  é uma órbita periódica de período 2. Como  $f_x$  é decrescente, segue imediatamente que se  $b < c$  são os pontos dessa órbita periódica,  $b < a < c$ . Como  $a, b$  e  $c$  são pontos fixos de  $f_x^2$ , pela proposição anterior,  $Df_x^2(a) > 1$ , portanto  $0 < a < 1/e$ . ■

Portanto a resposta para a nossa questão está completa, existe solução da equação quando  $e^{-1} \leq a \leq e$ .

As provas que conheço desse resultado (especialmente da recíproca da proposição anterior) são muito mais longas e técnicas sem o uso da derivada de Schwarz.

### 3 A família quadrática

No estudo de sistemas dinâmicos, muitas vezes sistemas aparentemente simples sob outros aspectos revelam uma riqueza surpreendente. Considere a família quadrática

$$p_a : I \rightarrow I, I = [0, 1]$$

$$p_a(x) = ax(1-x), 0 < a \leq 4.$$

Ilustraremos a complexidade da família quadrática através da seguinte representação gráfica do conjunto limite. Para cada valor de  $a$ , escolhamos um ponto  $x_a$  e consideremos conjunto definido por

$$\mathbb{B} = \{(a, \omega_{p_a}(x_a))\}.$$

O que se obtém depende de como se escolhe  $x_a$ . Representamos na figura 2 o que se obtém com  $x_a = 1/2$  (escolhido por ser o ponto crítico) para todo  $a$ . Esse conjunto é chamado conjunto de bifurcação da família quadrática. Conjuntos similares associados a outras famílias são também chamados diagramas de bifurcação.

Observe que na seção anterior estivemos de certa maneira analisando o conjunto  $\tilde{\mathbb{B}} = \{(x, \omega_{f_x}(1))\}$ . Nossa conclusão (que permitiu resolver o problema) pode ser interpretada em termos desse diagrama de bifurcação, pois mostramos que  $\tilde{\mathbb{B}}$  intersecta cada reta vertical em nenhum ponto (quando a órbita escapa), 1 ponto (converge a um ponto fixo) ou 2 (converge a uma órbita periódica de período 2), além de estimarmos em que regiões do parâmetro  $x$  cada um dos comportamentos predomina).

O leitor certamente pode perceber que as coisas são um pouco mais complicadas para a família quadrática.

#### 3.1 Funções unimodais

O problema geral de sistemas dinâmicos é compreender a maior parte das órbitas da maior parte dos sistemas (um outro problema é formular o que se entende por isso). Sob esse ponto de vista, o interesse maior da família quadrática é que ela modela uma classe de sistemas dinâmicos, as funções unimodais. Trabalharemos apenas com funções que sejam pelo menos  $C^3$ , que serão chamadas de suaves.



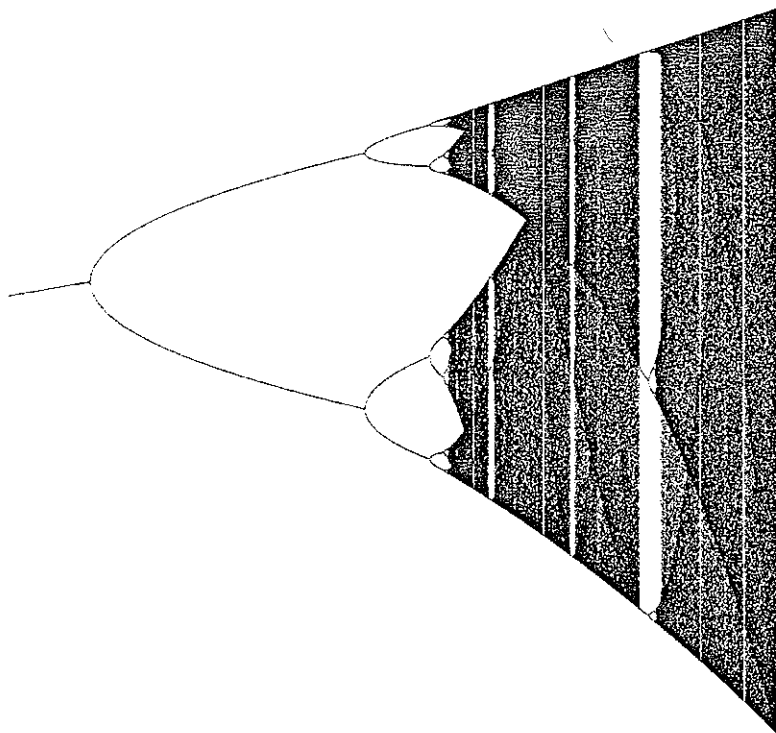


Figura 2: O diagrama de bifurcação da família quadrática

**Definição 3.1** *Uma função  $g : I_1 \rightarrow I_2$  é uma dobra se for suave, possuir um único ponto crítico  $c$  no interior de  $I$  e não for monótona. Uma dobra  $g : I \rightarrow I$  tal que  $g(\partial I) \subset \partial I$  é chamada unimodal.*

(A maior parte dos conceitos utilizados aqui é descrita com mais precisão em [MvS], onde estão descritos resultados mais aprofundados sobre funções unimodais e mais geralmente dinâmica unidimensional.)

Uma função é unimodal portanto se seu gráfico parece com o de uma função quadrática. Ao longo desse artigo será discutido em que medida a família quadrática de fato modela as funções unimodais. Como exemplo, um dos resultados principais de [ALM] é que o diagrama de bifurcação associado a uma família analítica de funções unimodais essencialmente

qualquer é modelado com muita precisão no da família quadrática.

## 4 Universalidade combinatória

Na década de 70, Milnor e Thurston criaram um modelo combinatório para as funções unimodais. Discutiremos de maneira simplificada alguns resultados.

Em primeiro lugar é necessário identificar a fonte da complexidade da família quadrática. O candidato óbvio é o ponto crítico, visto que funções do intervalo sem pontos críticos são monótonas e como vimos antes, dinamicamente triviais. A órbita crítica é especial, apresentando uma obstrução natural para que duas funções tenham o mesmo comportamento dinâmico. Para enunciar precisamente essa obstrução, introduziremos o conceito de conjugação topológica.

**Definição 4.1** *Duas funções unimodais  $f_1 : I_1 \rightarrow I_1$  e  $f_2 : I_2 \rightarrow I_2$  são ditas topologicamente conjugadas se existe um homeomorfismo  $h : I_1 \rightarrow I_2$  tal que  $h \circ f_1 = f_2 \circ h$ .*

Como  $h \circ f_1 = f_2 \circ h \implies h \circ f_1^n = f_2^n \circ h$ , tem-se que  $h$  leva órbitas de  $f_1$  em órbitas de  $f_2$ .

Uma conjugação topológica necessariamente leva um ponto crítico no outro, portanto como  $h$  é um homeomorfismo, duas funções topologicamente conjugadas tem a mesma ordem na órbita crítica:  $f_1^i(c_1) \leq f_1^j(c_1) \iff f_2^i(c_2) \leq f_2^j(c_2)$ .

Em seu trabalho, Milnor e Thurston consideram essa ordem de um ponto de vista diferente, mas essencialmente equivalente. Em particular, eles associam a cada função unimodal  $f$  uma classe combinatória  $k(f)$ , de maneira que se duas funções tem a mesma ordem na órbita crítica, elas tem a mesma classe combinatória.

Para estudar como a dinâmica varia com  $f$ , eles introduziram uma ordem total no conjunto das classes combinatórias. Essa ordem é natural no sentido ilustrado pelo próximo teoremas.

**Teorema 4.1** *Se  $f_t, a \leq t \leq b$  é uma família de funções unimodais e  $k(f_a) < k < k(f_b)$  então existe  $c \in [a, b]$  tal que  $k(f_c) = k$ .*

Isso significa que o conjunto das classes combinatórias de uma família a um parâmetro é um intervalo no espaço de combinatórias.

O próximo teorema mostra que tal ordem não é muito misteriosa.

**Teorema 4.2** *Seja como antes  $p_a$  a família quadrática. Então  $a \leq b \iff k(p_a) \leq k(p_b)$ . Além disso, se  $k$  é uma classe combinatória, existe  $a$  tal que  $k(p_a) = k$ .*

Esse teorema é nossa justificativa para o título da sessão: a família quadrática pode ser naturalmente identificada com o espaço de combinações: a função que associa a cada parâmetro  $a$  a classe de  $p_a$  é monótona sobrejetiva.

## 5 O modelo topológico

Embora o último resultado da sessão anterior seja plenamente satisfatório do ponto de vista combinatório, do ponto de vista topológico ela ainda deixa um pouco a desejar. Em primeiro lugar, os resultados ainda seriam válidos se ao invés de trabalhar com a classe combinatória considerássemos a classe de conjugação topológica? E a função monótona que associa uma função quadrática a sua classe combinatória seria injetiva?

A resposta a ambas as questões é não, mas isso não significa que não se possa dizer mais sobre o problema.

Quanto a primeira questão, embora duas funções com a mesma combinatória possam não ser topologicamente conjugadas, a obstrução é completamente entendida. Ao invés de descrever exatamente essa obstrução, vamos enunciar um resultado positivo, ao mesmo tempo que veremos de novo nossa amiga derivada de Schwarz. Observe que funções quadráticas possuem derivada de Schwarz negativa.

**Teorema 5.1** *Sejam  $f_1, f_2$  unimodais com  $Sf_1, Sf_2 < 0$  tais que  $k(f_1) = k(f_2)$ . Sejam  $I_1$  e  $I_2$  os menores intervalos onde  $f_1$  e  $f_2$  são unimodais (e portanto contém o ponto crítico, descrevendo portanto a parte interessante da dinâmica). Então  $f_1|_{I_1}$  e  $f_2|_{I_2}$  são topologicamente conjugadas.*

Portanto se nos restringirmos a classe de funções com derivada de Schwarz negativa, os conceitos de combinatória e conjugação topológica são essencialmente equivalentes.

De agora em diante, para simplificar a exposição, entenderemos por função unimodal uma função com derivada de Schwarz negativa topologicamente conjugada a uma função quadrática.

Quanto a segunda questão, tentemos localizar a obstrução.

**Definição 5.1** *Uma função unimodal é chamada hiperbólica se  $\omega(c)$  é uma órbita periódica  $p, f(p), \dots, f^n(p) = p$  e  $0 < |Df^n(p)| < 1$ . Uma órbita periódica com essa propriedade para a derivada é chamada um atrator hiperbólico.*

Dada uma órbita periódica  $O(p)$  de período  $n$ , diremos que  $Df^n(p)$  é o autovalor dessa órbita. Observe que se  $p$  é periódico de período  $n$ ,  $Df^n(f^j(p)) = Df^n(p)$  para todo  $j \geq 0$ . Isso mostra que o autovalor está bem definido.

A presença de atratores hiperbólicos torna a dinâmica muito mais simples de se entender. No nosso exemplo inicial, que conseguimos entender completamente, a razão da simplicidade de tais sistemas está relacionada com a presença de atratores hiperbólicos, embora tenhamos podido evitar mencionar o conceito devido a simplicidade do sistema envolvido. Em todo caso o leitor pode retornar aquela seção e observar que nas regiões  $1/e < 1$  e  $1 < a < e$  o ponto fixo é atrator, enquanto se  $0 < a < 1/e$  há uma órbita periódica de período dois atratora. A mudança de comportamento do sistema em  $a = 1/e$  é relacionada a esse fato.

**Definição 5.2** *Dado um conjunto  $X$  definimos a bacia de  $X$ ,  $B(X)$ , como  $B(X) = \{x | \omega(x) \subset X\}$ .*

Se o conjunto  $X$  é um atrator hiperbólico, a dinâmica em  $B(X)$  é muito simples:  $B(X)$  é um conjunto aberto onde todo ponto converge exponencialmente para a órbita periódica.

O próximo teorema descreve essencialmente a dinâmica de uma função hiperbólica do ponto de vista topológico.

**Teorema 5.2** *Seja  $f$  uma função unimodal hiperbólica. Então a bacia do atrator é um aberto e denso.*

É também simples descrever o que ocorre para funções próximas a uma hiperbólica. O seguinte teorema é uma simples aplicação do teorema das funções implícitas.

**Teorema 5.3** *Seja  $X_f$  um atrator hiperbólico para  $f$ . Existe uma vizinhança  $V$  de  $f$  na topologia  $C^1$  tal que qualquer  $g \in V$  possui um único atrator hiperbólico  $X_g$  próximo de  $X_f$ . Além disso, se  $K \subset B(X_f)$  é compacto, existe uma vizinhança  $V_K$  de  $f$  na topologia  $C^1$  tal que qualquer  $g$  em  $V_K$ , contém  $x$  em sua bacia (isso se exprime dizendo que a bacia é persistente).*

Em particular, o conjunto das funções hiperbólicas é aberto (pois qualquer função próxima de uma hiperbólica possui um atrator que contém o ponto crítico em sua bacia, por esta ser persistente). É fácil ver que duas funções hiperbólicas próximas tem a mesma combinatória e portanto são topologicamente conjugadas.

Isso explica porque a resposta para a segunda pergunta no início da sessão é não: cada combinatória hiperbólica corresponde não a um parâmetro, mas a um aberto de parâmetros na família quadrática. Isso também nos permite compreender melhor parte do diagrama de bifurcação. Considere a seguinte ampliação da figura 2.

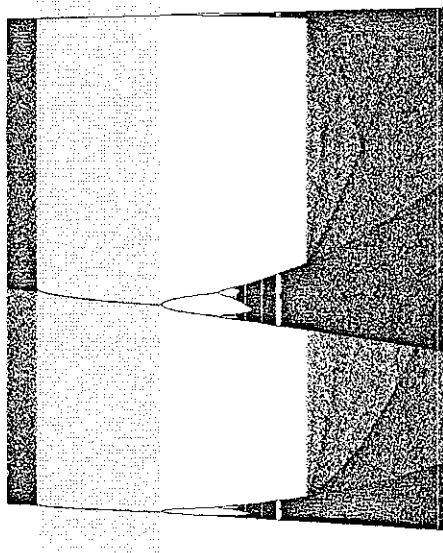


Figura 3: A janela de período 3 (em cinza).

A região representada corresponde a existência de um atrator hiper-

bólico de período três. As três linhas visíveis mostram como muda a órbita periódica atratora com o parâmetro.

Terminemos a seção com o seguinte teorema (provado independentemente por Lyubich [L1] e Graczyk-Swiatek [GS]) que expressa que hiperbolicidade é de fato o único fenômeno persistente na família quadrática (e portanto a única obstrução a injetividade).

**Teorema 5.4** *Cada combinatória não hiperbólica corresponde a exatamente um parâmetro na família quadrática.*

Tal teorema é conhecido como rigidez topológica, e seu equivalente para funções unimodais mais gerais foi provado por Kozlovski [K], partindo do resultado para a família quadrática.

## 6 Renormalização

### 6.1 Duplicação de período

Como vimos, a existência de um atrator hiperbólico é um fenômeno persistente. Considere novamente a janela de período três. Ela corresponde a um intervalo no espaço de parâmetros. O que acontece na fronteira desse intervalo?

Obviamente, não pode haver um atrator hiperbólico, pois esse é um fenômeno persistente. O que acontece é que o autovalor do atrator atinge módulo 1 nesses pontos. De fato, no bordo esquerdo o autovalor é 1 e do lado direito é  $-1$ .

Observe também que do lado esquerdo o diagrama de bifurcação é bastante complicado, enquanto que do lado direito simplesmente começa uma nova janela. Essa janela é de período seis, e pode-se ver que de cada ponto da órbita periódica de período três brotam dois pontos pertencentes a órbita de período seis.

Vamos descrever rapidamente o processo em que um atrator de período  $n$  se transforma num de período  $2n$ . No que segue consideraremos a bifurcação do ponto fixo  $p = 2/3$  de derivada  $-1$  para  $g = p_3$ .

(A descrição que daremos também cobre o nosso primeiro exemplo, onde há a passagem de um ponto fixo atrator para um atrator de período dois no parâmetro  $a = 1/e$ .)

Observe que  $p$  é um ponto fixo para  $g^2$ , de autovalor 1. Por um cálculo simples, vemos que  $D^2g^2(p)$  e pela condição da derivada de Schwarz negativa,  $D^3g^2(p)/Dg^2(p) < 0$ , justificando a figura 4.

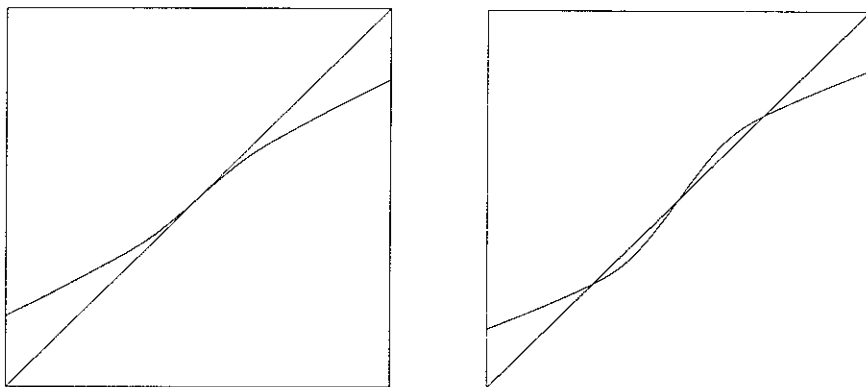


Figura 4: Duplicação de período em detalhe: a esquerda temos o gráfico de  $g^2$  próximo a  $p$  e a direita o aparecimento de dois pontos atratores

Ao modificarmos um pouco  $g$ , obtemos que o ponto fixo persiste mas seu autovalor muda. Estamos interessados no caso em que o autovalor fica menor que  $-1$ , que corresponde ao ponto fixo deixar de ser atrator. Observemos o efeito que essa perturbação provoca em  $g^2$ . Devido a condição  $D^3g^2(p) < 0$ , observamos que ao modificar  $g^2$  criamos um ponto fixo repulsor (correspondente ao ponto fixo repulsor de  $g$ ), simultaneamente criamos dois pontos fixos atratores, um de cada lado (compare com a proposição 2.4). Esses pontos fixos atratores são permutados por  $g$ . (Exercício: verificar as afirmações desse parágrafo.)

Dessa maneira, vemos que cada janela de período  $n$  está colada a uma de período  $2n$  do lado em que o ponto periódico de período  $n$  tem autovalor  $-1$ . É claro portanto que podemos continuar esse processo, obtendo janelas de período  $4n, 8n, \dots$

## 6.2 Universalidade

A bifurcação de período era algo que interessava especialmente porque ela era entendida como a aproximação do caos. Observe por exemplo que

após a seqüência simples de janelas correspondentes a uma bifurcação de período, o diagrama de bifurcação volta a ser complicado.

Na década de 70, Feigenbaum e independentemente Coulet-Tresser estudaram esse processo. Para os parâmetros menores que  $a_1 = 3$  havia um atrator fixo. Entre  $a_1$  e  $a_2$ , um atrator de período 2, e assim por diante. Os números  $a_n - a_{n-1}$  portanto representam o comprimento das janelas de período  $2^n$ . As observações numéricas desses valores mostraram algo surpreendente,

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$$

se aproximava de uma certa constante  $\delta$  a medida que  $n$  crescia.

Só isso já seria uma descoberta surpreendente. Para entender porque, observe-se que em sistemas dinâmicos e em especial no estudo de bifurcações, os fenômenos que surgiam eram tão complexos que desafiavam qualquer entendimento mais profundo dos aspectos métricos e o máximo que se tentava, muitas vezes sem sucesso, era obter resultados qualitativos (um exemplo simples: uma janela de período  $n$  é sempre colada com uma de período  $2n$ ). A existência de uma constante relacionada com uma seqüência de bifurcações aparentemente independentes provocou muitas associações com fenômenos físicos, como por exemplo a transição de fase.

Havia algo no entanto que tornava a descoberta ainda mais surpreendente (e daria ao fenômeno o nome de universalidade). Se considerarmos a janela de período 3 e suas duplicações e fizermos o mesmo, chegaremos a mesma conclusão. E com a mesma constante. E se considerarmos uma família (essencialmente qualquer) que passe por uma infinidade de bifurcações de período, o fenômeno (e a constante) persistem! A existência de uma constante relacionada com uma seqüência de bifurcações aparentemente independentes provocou muitas associações com fenômenos físicos, como por exemplo a transição de fase.

### 6.3 Renormalização

A explicação de tal fenômeno foi primeiro sugerida por Feigenbaum.

**Definição 6.1** Dizemos que  $f$  é renormalizável se existe um intervalo  $c \in J \subset I$  e  $n > 1$  tais que  $f^n(J) \subset J$  e  $f^j(J) \cap J = \emptyset, 1 \leq j < n$ . O menor  $n$  com essa propriedade é chamado período de  $f$ .



Um exemplo simples é dado na figura 5, onde consideramos  $p_a$  com  $a$  um pouco maior que 3.

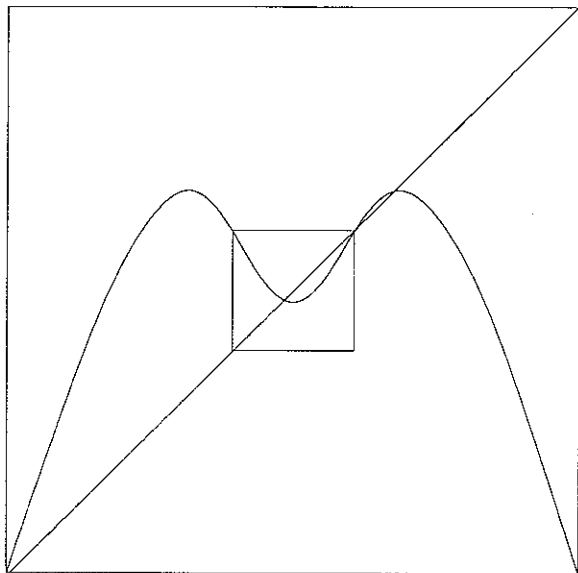


Figura 5: Segundo iterado de uma função renormalizável de período 2.

Nesse exemplo fica claro pela figura que  $p_a$  é renormalizável de período 2.

Para uma função renormalizável, temos que  $f|_J$  é uma dobra e  $f|_{f^i(J)}$  é um difeomorfismo se  $1 \leq i < n$ , pois  $c \notin f^i(J)$ . Portanto,  $f^n|_J$  é unimodal.

**Definição 6.2** *Seja  $f$  renormalizável de período  $n$  e  $J$  o menor intervalo com  $f^n(J) \subset J$ ,  $f^n(\partial J) \subset \partial J$ . Seja  $A: J \rightarrow [0, 1]$  uma função afim com  $A(f(\partial J)) = 0$ . Definimos  $Rf = A \circ f^n|_J \circ A^{-1}$ .*

Na definição acima, primeiro removemos ambigüidades na escolha de  $J$  e depois fazemos uma mudança de escala (de onde o nome renormalização), levando  $J$  num intervalo canônico. Isso atua como um microscópio, tornando a dinâmica de  $f$  visível no intervalo  $J$  que poderia ser pequeno e evita que os objetos limites que consideraremos colapsem.

Esse processo portanto associa a um sistema dinâmico renormalizável um novo sistema dinâmico. Tentemos entender agora como o operador de renormalização ajuda a compreender a bifurcação de período. No caso, só precisaremos usar a renormalização de período 2, que foi mostrada atuando na figura anterior. Analisaremos portanto sua atuação na cascata de bifurcação de período  $a_1, a_2, \dots$

Primeiro notemos que um ponto periódico de  $f$  situado em  $J$  corresponde a um ponto periódico para  $Rf$  de período metade do anterior. Uma análise mais detalhada mostra de fato que  $k(R(p_{a_{n+1}})) = k(p_{a_n})$ , ou seja, ao renormalizarmos uma bifurcação  $2^{n+1} \rightarrow 2^{n+2}$  obtemos uma bifurcação  $2^n \rightarrow 2^{n+1}$ .

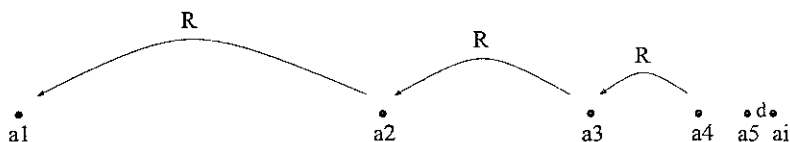


Figura 6: Ação do operador de renormalização sobre as combinatórias (uma dimensão).

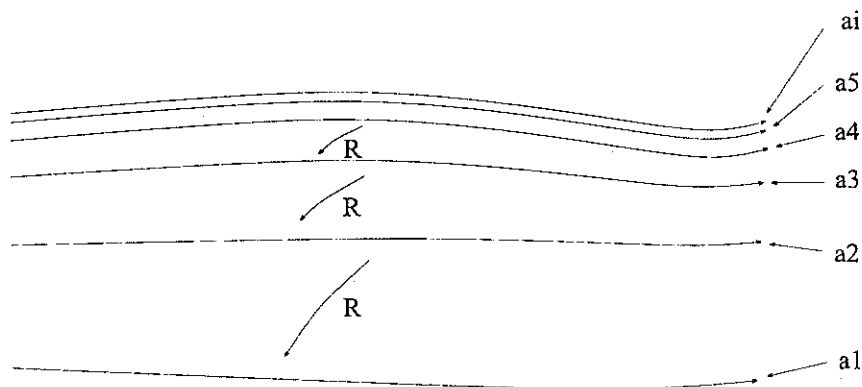


Figura 7: Ação do operador de renormalização no espaço de funções unimodais (dimensão infinita): cada curva representa o conjunto de funções associado a uma classe combinatoria.

A explicação de Feigenbaum para a universalidade seria a existência de um ponto fixo  $\mathbb{F}$  (uma função universal) hiperbólico para o operador de renormalização. Ele atrairia a classe combinatória de  $a_\infty$  (que seria uma subvariedade de codimensão um) exponencialmente e expandiria uma direção de dimensão um, com o mesmo valor da constante universal da bifurcação. Essa direção sendo transversal a uma classe combinatória constante, seria equivalente ao espaço de combinatórias em certo sentido.

Como isso explica o fenômeno? Para observar a bifurcação de período perto de  $a_\infty$ , usamos o microscópio da renormalização iterado muitas vezes. Isso leva  $a_\infty$  para perto do ponto fixo de  $R$ . Perto do ponto fixo, vemos a classe combinatória de  $a_{n+1}$  ser levada na de  $a_n$ , se afastando do ponto fixo de acordo com o autovalor expansivo. Isso ajuda também a explicar a geometria em pequena escala das funções na classe de  $k(a_\infty)$ , que é similar a de  $\mathbb{F}$ .

Portanto, a teoria hiperbólica estava sendo invocada para entender a universalidade. Para entender uma classe de sistemas dinâmicos em dimensão um, somos levados a usar um sistema dinâmico em dimensão infinita!

(Pessoas com familiaridade com a teoria hiperbólica vão enxergar na discussão simplificada acima uma aplicação do  $\lambda$ -lemma. Também é óbvio que muitos detalhes estão sendo omitidos.)

Após a conjectura, uma prova foi obtida relativamente rápido por Lanford, numa das primeiras aplicações de computadores em provas matemáticas rigorosas.

Após esse sucesso da teoria, muitas pessoas tentaram obter provas conceituais da conjectura. Isso teria dois objetivos. De um lado, tentar entender realmente o que está por trás do fenômeno, seria só um acidente a existência de um ponto fixo com tais propriedades? Por outro lado, uma prova conceitual poderia ser generalizada para explicar a universalidade de outras bifurcações, como a associada a renormalização de período 3. Provas numéricas (pelo menos como tentadas até hoje) só poderiam lidar com um número finito de casos, uma prova conceitual seria um resultado muito mais geral.

A prova completa da conjectura generalizada foi recentemente dada por Lyubich [L2], fortemente baseada na complexificação do problema. Idéias chave foram por exemplo o uso de teoria de deformação de estruturas conformes (introduzido na teoria de iteração por Sullivan, já pre-

sente anteriormente no estudo de grupos Kleinianos), rigidez de certos objetos (McMullen, obtendo na teoria resultados análogos ao da rigidez de Mostow em geometria de 3-variedades), e é claro análise complexa em dimensão infinita.

## 7 Probabilidade

Approach from the categorical side is interesting more as a tool of proving existence results..., while an approach from the measure-theoretical side seems to be physically reasonable and natural.

*Kolmogorov, anunciando o teorema que daria início a teoria KAM.*

Como dissemos anteriormente, o objetivo dos sistemas dinâmicos é entender o que acontece com a maioria das órbitas da maioria dos sistemas. Maioria é obviamente um conceito vago, e o que se entende por maioria é algo que mudou com o tempo. Originalmente, tentavam-se obter propriedades topologicamente robustas, portanto conceitos como aberto e denso e categoria de Baire eram os que se consideravam na análise. Atualmente, isso foi em grande parte substituído pelo conceito de probabilidade total com relação a alguma medida de referência. Se estivermos considerando variedades diferenciáveis, existe uma medida natural de referência, a medida de Lebesgue  $\lambda$ . A compreensão da dinâmica faz uso então de uma medida invariante  $\mu$  (ou seja  $\mu(f^{-1}(X)) = \mu(X)$ ) para qualquer conjunto mensurável  $X$ , que será relevante na medida em que descrever conjuntos significativos na medida de Lebesgue.

Esse ponto de vista probabilístico tem sido intensamente desenvolvido para funções unimodais recentemente. Teoremas como o teorema central do limite são válidos com grande generalidade. O estudo de perturbações estocásticas tem sido extremamente bem sucedido. Para apenas enunciar o significado desses resultados nesse contexto, é necessário um alto grau de preparação inicial. Indicaremos agora algumas referências para o leitor que desejar se aventurar nesse tema.

O primeiro passo para um tratamento probabilístico é encontrar uma medida invariante relevante com respeito a medida de referência (tal medida é chamada física). Isso não é possível sempre, mas resultados recentes indicam que isso é possível quase sempre. Um bom artigo (ainda

em nível de divulgação) descrevendo o mais importante resultado nessa direção é o de M. Lyubich em [L4]. Artigos de pesquisa relevantes nessa direção são [ALM], [AM2] e [L3].

Uma vez de posse de uma medida física podemos investigar propriedades estatísticas diversas. O artigo de Keller e Nowicki [KN] mostra entre outras coisas como em certos casos são válidos teoremas descrevendo decaimento de correlações e o teorema central do limite. Tal passagem não é automática, pois nem toda medida física tem boas propriedades estatísticas.

Vimos anteriormente que funções hiperbólicas são estáveis por perturbações. No entanto nem toda função é hiperbólica, e de fato esse não é um dos fenômenos válidos quase sempre. O conceito de estabilidade estocástica, onde considera-se uma perturbação do sistema dinâmico por um ruído alcatório é um conceito interessante que pode ser usado em substituição ao conceito anterior de estabilidade (determinística). Nem todo sistema é estocasticamente estável, mas um resultado de Baladi e Viana em [BV] dá condições suficientes para tal. Resultados recentes em [AM1] e [AM2] indicam que tais condições são válidas quase sempre, assim como valem quase sempre as boas propriedades estatísticas de [KN].

**Agradecimentos:** Obrigado a Claudio Landim por incentivar a escrever esse texto e a Viviane Baladi por importantes sugestões. Algumas idéias (como as citações) foram livremente emprestadas do artigo [L4] de M. Lyubich, assim como algumas figuras vieram da homepage de C. McMullen.

## Referências

- [ALM] A. Avila, M. Lyubich and W. de Melo. Regular or stochastic dynamics in real analytic families of unimodal maps. Em preparação
- [AM1] A. Avila and C. G. Moreira. Statistical properties of unimodal maps. Em preparação.
- [AM2] A. Avila and C. G. Moreira. Generic families of smooth unimodal maps. Em preparação.

- [BV] V. Baladi and M. Viana. Strong stochastic stability and rate of mixing for unimodal maps. *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, v. 29 (1996), 483-517.
- [GS] J. Graczyk & G. Świątek. Generic hyperbolicity in the logistic family. *Ann. of Math.*, v. 146 (1997), 1-52.
- [K] O.S. Kozlovsky. Structural stability in one-dimensional dynamics. Thesis (1998).
- [KN] Keller and Nowicki. Spectral theory, zeta functions and the distribution of periodic points for Collet-Eckmann maps. *Comm. Math. Phys.*, 149 (1992), 31-69.
- [L1] M. Lyubich. Dynamics of quadratic polynomials, I-II. *Acta Math.*, 178 (1997), 185-297.
- [L2] M. Lyubich. Feigenbaum-Couillet-Tresser Universality and Milnor's Hairiness Conjecture. *Ann. Math.* (1999).
- [L3] M. Lyubich. Almost any real quadratic map is either regular or stochastic. Preprint IMS at Stony Brook, # 1997/8. To appear in *Ann. Math.*
- [L4] M. Lyubich. The quadratic family as a qualitatively solvable model of chaos. *Notices of the AMS*, 47 (2000), 1042-1052.
- [MvS] W. de Melo & S. van Strien. *One-dimensional dynamics*. Springer, 1993.

IMPA

Estrada Dona Castorina 110

Jardim Botânico

22460-320 Rio de Janeiro-RJ