

Resenhas de Livros¹

Elementary fluid dynamics, *por D. J. Acheson*, Oxford University Press, Reino Unido, 1990, ix+397pp, paperback, ISBN 0-19-859679-0.

Max O. Souza

Vivemos cercados, literalmente, por fluidos e, ainda assim, nem sempre nos damos conta da importância que a dinâmica deles possa ter no nosso cotidiano. Se pararmos para pensar um pouco, talvez nos lembremos das chuvas torrenciais e, possivelmente, das enchentes que quase sempre as acompanham. Podemos também nos lembrar das ondas quebrando nas praias ou, quem sabe, dos pássaros que cruzam os céus. Em todos estes exemplos, a dinâmica de fluidos correspondente é de extrema complexidade, e ainda não é totalmente entendida. Mas o estudo da dinâmica dos fluidos vai além desse exemplos contemplativos: a fabricação de chocolate, o estudo de processos meteorológicos (como o movimento de massas de ar na atmosfera e a circulação dos oceanos), a dinâmica do sangue no sistema cardiovascular e o crucial processo de se inflar o pulmão de um recém-nascido prematuro; todos são exemplos de situações onde um conhecimento mais profundo do comportamento dos fluidos pode ser muito importante.

O estudo da dinâmica dos fluidos vem desafiando várias gerações de cientistas. Nomes como Arquimedes, Bernoulli, Newton, Euler, Lagrange, Cauchy, Laplace, Stokes, Riemann e Rayleigh estão associados a vários dos desenvolvimentos da teoria. Mais recentemente, vários pesquisadores de talento vêm trabalhando no problema, incluindo dois ganhadores da medalha Fields. Ainda assim, o nosso conhecimento

¹Seção coordenada por Sérgio Volchan

sobre, por exemplo, as equações que governam os fluidos é muito pequeno, e avançar nessa direção é uma questão de grande importância na matemática contemporânea².

Acheson escreveu um livro onde o aprendizado de dinâmica dos fluidos, como uma disciplina de matemática aplicada, pode ser feito de maneira integrada: a modelagem dos fenômenos, o uso de soluções especiais e análise assintótica e a demonstração de alguns resultados rigorosos³. Assim, o texto discute a importância das situações especiais consideradas, bem como a interpretação das soluções e hipóteses usadas na análise destes casos. No lado mais técnico, o livro introduz vários conceitos de equações diferenciais parciais como, por exemplo, o método das características, soluções auto-similares, análise assintótica e métodos de energia. Um aviso oportuno, entretanto, é de que o livro não é uma introdução às técnicas de equações diferenciais modernas usadas para estudar as equações de Euler e Navier-Stokes. Se este for o interesse da leitora, uma boa introdução pode ser encontrada em [MN91], enquanto um tratamento bem mais avançado, mas restrito às equações invíscidas em 2-D, pode ser encontrado em [LFNL99], onde a leitora encontrará também uma generosa bibliografia. Outras referências são [Lio96] (um tratamento completo, mas sucinto, das equações incompressíveis com e sem viscosidade) e [MP94], que trata somente de fluidos invíscidos 2-D. Numa linha um pouco mais próxima do livro do Acheson, podemos citar [CM93] que tenta ser mais rigoroso, mas deixa muito a desejar na abordagem dos problemas de dinâmica de fluidos; em termos de literatura mais avançada, nesta mesma linha, recomendamos o clássico [Bat67] e os textos mais voltados para físicos de [LL87] e [Tri88].

O livro se divide em nove capítulos, que discutem os vários aspectos clássicos de fluidos ideais e viscosos incluindo ondas, dinâmica de vórtices, filmes finos e camadas-limite. Cada capítulo contém vários exercícios com graus variados de dificuldade e, ao final do livro, pode-se encontrar algumas respostas e dicas. Além disso, um apêndice sobre identidades e teoremas de cálculo vetorial fazem a leitura do livro um pouco mais auto-contida.

No primeiro capítulo, Acheson convida a leitora a um pequeno ex-

²Como sugere o prêmio de um milhão de dólares oferecido pelo Clay Institute (veja http://www.claymath.org/prize_problems).

³Um referência breve, mas bastante instrutiva, sobre idéias e técnicas de matemática aplicada é [Lax89].

perimento, que vai servir de pano de fundo para os vários tópicos estudados no decorrer do texto: corte um pedaço de isopor no formato de um aerofólio, coloque-o numa bacia com água e coloque um bocado de tinta na parte afiada do mesmo; depois, incline levemente o aerofólio e mova-o e observe a formação de um vórtice na região próxima onde o movimento começou. Pode ser surpreendente, mas convém retornar ao primeiro capítulo, após estudar um parte substancial do livro, para se convencer de que uma observação simples como essa pode precisar de um instrumental matemático e de modelagem bastante sofisticado para ser entendida. Após alguma discussão qualitativa sobre o experimento acima, são apresentadas várias idéias básicas como a noção de linhas de corrente, derivada material e circulação. A noção de incompressibilidade é elaborada, as equações de movimento são derivadas de uma maneira sucinta e o conceito de vorticidade é apresentado. São mostradas algumas conseqüências da forma das equações, como os vários teoremas de Bernoulli.

O segundo capítulo é uma discussão elementar de escoamentos viscosos. As equações de Navier-Stokes são apresentadas quase que sem justificativa e a ênfase é na construção de soluções que ilustram várias características do comportamento de fluidos viscosos em situações diversas. Além disso, a leitora trava contato com a idéia de adimensionalização e, conseqüentemente, com o primeiro parâmetro adimensional do texto: o número de Reynolds.

A trilha invíscida é retomada no capítulo três, com um estudo breve, apesar das quase setenta páginas do capítulo, da propagação de ondas em fluidos. Este é o único ponto do livro onde a hipótese de incompressibilidade é abandonada e uma discussão sobre as razões para considerar um mesmo fluido as vezes compressível, as vezes não, é apresentada. Várias formas de ondas são estudadas: superficiais, capilares, ondas acústicas, escoamento supersônico, ondas de gravidade, ondas em águas rasas, saltos hidráulicos, choques e ondas solitárias. Uma ótima continuação para o material deste capítulo é o clássico [Whi74].

No quarto capítulo, Acheson desenvolve uma das maiores conquistas do estudo de fluidos ideais: a teoria clássica de aerofólios, na qual muito da aerodinâmica do começo do século XX é baseada. O capítulo usa pesadamente métodos de variáveis complexas para obter escoamentos irrotacionais através de um cilindro e, via aplicações conformes, encontrar

as soluções no caso de aerofólios. A liberdade de se escolher a circulação da solução é usada para mostrar que existe apenas uma solução regular e motiva a hipótese de Kutta-Joukowski: a solução não singular é a observada na Natureza. O capítulo fecha com uma discussão sobre as forças envolvidas num corpo imerso em um escoamento irrotacional (o teorema de Blasius) e um breve comentário sobre o paradoxo de d'Alambert: um corpo não sente o *arrasto* do escoamento⁴ de um fluido invíscido. O estudo deste capítulo pode ser aprofundado com o material em [Bat67].

Dinâmica de vórtices é o assunto do quinto capítulo. À iniciante, surpreenderá o fato que resultados que dependem tão fundamentalmente da ausência de viscosidade sejam tão relevantes na teoria como um todo. O capítulo começa com o teorema da circulação de Kelvin, o teorema da persistência de escoamentos irrotacionais de Cauchy-Lagrange e os teoremas de Helmholtz. A partir destes teoremas, é possível dar uma discussão mais precisa, mas ainda qualitativa, do fenômeno observado no experimento da introdução. O capítulo também tem uma discussão sobre um dos fatos que tornam os vórtices *as articulações da turbulência* (veja [MKO94]): o esticamento de vórtices; encontra-se também uma discussão da natureza topológica da vorticidade e um exemplo interessante: o mecanismo de vôo de uma mosca (Weiss-Fogh) que poderia voar mesmo em fluidos ideais. A seguir, encontra-se uma discussão qualitativa sobre anéis de vórtices e o movimento de vórtices pontuais, onde a leitora vai encontrar a carta que Kelvin enviou a Helmholtz descrevendo o método das imagens. Ao final, uma pequena pérola: o teorema de Prandtl-Batchelor, que nos diz qual solução é o limite invíscido correto quando temos escoamentos em regime permanente com linhas de correntes fechadas (caso no qual não existe unicidade para soluções das equações de Euler). Ao terminar o capítulo, a leitora pode ficar com a suspeita que dinâmica de vórtices e um mundo por si só e, de fato, isso é verdade e ela pode encontrar muito mais no excelente tratado de [Saf92].

As equações de Navier Stokes são o assunto do sexto capítulo. Uma derivação clássica, a partir de certas hipóteses comuns no tratamento de meios contínuos é dada, porém sem chamar a atenção para as dificuldades matemáticas associadas à mesma. Uma abordagem mais rigorosa está fora do escopo de um livro elementar. Uma análise mais rigorosa,

⁴Fórmula um seria bem diferente se vivéssemos num mundo de fluidos ideais!

da derivação das equações de Navier-Stokes pode ser encontrada em [Ser59]. Entretanto, obter as equações do movimento de fluidos, a partir de uma análise das equações de Newton na escala microscópica, ainda é um problema em aberto. Uma discussão mais elaborada e alguns resultados parciais podem ser encontrados em [DMP91]

Os capítulos sete e oito tratam das características qualitativas dos escoamentos (soluções das equações de Navier-Stokes) em regimes especiais: o limite muito viscoso e o limite quase-inviscido. No primeiro caso, a *reversibilidade* das equações de movimento, neste limite, salta aos olhos na descrição do experimento de Taylor, onde após escrever um nome em um cilindro com glicerina e rodá-lo um certo número de voltas até tornar tudo um grande borrão; depois roda-se o cilindro o mesmo número de voltas na direção contrária e, acredite se quiser, o nome está lá, quase inalterado. Uma breve introdução à análise assintótica deste caso limite é apresentada e os resultados são usados para uma discussão sobre como nadar em fluidos muito viscosos. O estudo de escoamentos em filmes finos e teoria de lubrificação encerram o capítulo sete. No capítulo oito, desenvolve-se a história e teoria de um dos maiores avanços da matemática aplicada na virada do século XX: o conceito de camada-limite devido a Ludwig Prandtl. A idéia da camada-limite representa um grande passo na introdução de métodos assintóticos mais sofisticados (veja por exemplo [Hin91]). As escalas e equações para o problema típico de camada-limite são derivados e alguns problemas específicos são estudados. O capítulo termina com uma discussão sobre o fenômeno de separação da camada-limite e algumas das limitações do modelo.

O último capítulo lida com um tema que encanta multidões: instabilidade hidrodinâmica. Uma discussão histórica dos experimentos de Reynolds e uma análise simplificada da instabilidade de Kelvin-Helmholtz abrem o capítulo. A seguir, seguem-se pequenas discussões sobre problemas de instabilidade arquetípicos: convecção térmica, instabilidade centrífuga e instabilidade em escoamentos paralelos cisalhantes. Nestas discussões, a ênfase é na teoria linear e a leitora mais atenta perceberá a importância da teoria espectral para o problema⁵. A seguir, pode se encontrar uma visão impressionista da teoria não-linear e a demonstração do teorema de estabilidade de Serrin. A última seção dis-

⁵Embora quase todos os operadores envolvidos não sejam auto-adjuntos, o que pode deixar algumas pessoas desapontadas.

cute instabilidade em escoamento muitos viscosos como, por exemplo, a instabilidade observada num jato de mel. Aqui, como no capítulo três, o assunto é muito extenso para ser tratado por um livro elementar e o material pode ser complementado com o excelente tratado de [DR81]; uma introdução simplificada, em português, pode ser encontrada em [Sou99].

O texto é um livro escrito por um *dinamicista de fluidos*⁶ para pessoas genuinamente interessadas em aprender Dinâmica dos Fluidos mas, que tenham também um interesse em entender os fenômenos da maneira mais rigorosa possível⁷. Assim, o livro é não só uma excelente introdução ao estudo dos movimentos dos fluidos, servindo como um trapolim para estudos mais avançados, mas também apresenta a leitora a uma escola de Matemática Aplicada que remonta aos nossos heróicos antepassados do século XIX como Laplace, Riemann, Rayleigh, Fourier e Kelvin, entre outros.

Referências

- [Bat67] George K. Batchelor. *An introduction to fluid mechanics*. Cambridge University Press, 1967.
- [CM93] Alexander J. Chorin and Jerrold E. Marsden. *A mathematical introduction to fluid mechanics*. Springer-Verlag, 3^a edition, 1993.
- [DMP91] A. De Masi and E. Presutti. *Mathematical methods for hydrodynamic limits*, volume 1501 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 1991.
- [DR81] P. G. Drazin and W. H. Reid. *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press, 1981.
- [Hin91] E. J. Hinch. *Perturbation methods*. Cambridge University Press, 1991.
- [Lax89] Peter D. Lax. The flowering of applied mathematics in America. *SIAM Review*, 31:533–541, 1989.

⁶Tentativa desesperada de verter para o português a expressão *fluid dynamicist*.

⁷Em outras palavras: matemáticos aplicados.

- [LFNL99] M. C. Lopes Filho and H.J. Nussenzveing Lopes. *Weak solutions for the equations of incompressible and inviscid fluid dynamics*. IMPA, 1999. Texto do curso no 22^o Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [Lio96] P. L. Lions. *Mathematical topics in fluid mechanics*. Oxford University Press, 1996.
- [LL87] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987.
- [MKO94] H. K. Moffatt, S. Kida, and K. Ohkitani. Stretched vortices—the sinews of turbulence—large Reynolds asymptotics. *J. Fluid Mech.*, 259:241–264, 1994.
- [MN91] Severino Toscano Melo and Francisco Moura Neto. *Mecânica dos fluidos e equações diferenciais*. IMPA, 1991. Texto do curso no 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática.
- [MP94] C. Marchioro and M. Pulvirenti. *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*. Springer-Verlag, 1994.
- [Saf92] P. G. Saffman. *Vortex dynamics*. Cambridge University Press, 1992.
- [Ser59] J. Serrin. Mathematical principles of classical fluid mechanics. In *Handbuch der Physik*, volume VIII, pages 125–263. Springer-Verlag, 1959.
- [Sou99] M. O. Souza. *Introdução à estabilidade hidrodinâmica*. SBMAC, 1999. Texto do curso no XXII CNMAC.
- [Tri88] D. J. Tritton. *Physical fluid dynamics*. Oxford University Press, 1988.
- [Whi74] G. B. Whitham. *Linear and nonlinear waves*. John Wiley & Sons, 1974.

Departamento de Matemática
PUC - Pontifícia Universidade Católica
Rua Marquês de São Vicente, 225 - Gávea
22543-900 - Rio de Janeiro