MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 30 – junho 2001 – pp. 135-140

Resenhas de Livros[1]

Sobre *Turbulence: the legacy of A. N. Kolmogorov* de Uriel Frisch, Cambridge Univ. Press, 1995.

Milton da Costa Lopes Filho

O que é turbulência? Uma maneira simples de descrever turbulência é como um tipo de fluxo de fluido onde a velocidade, medida em um certo ponto, não fica determinada, nem sequer aproximadamente, pelas condições em que o fluido está posto em movimento. Mais precisamente, imagine-se um aparato experimental onde ocorre um fluxo de fluido e onde certos parâmetros do aparato, tais como sua geometria, pressão aplicada ou as características físicas do fluido podem ser variados. Pois bem, em um fluxo turbulento, medições feitas repetidas vezes conservando-se os mesmos parâmetros do aparato não fornecem resultados sequer parecidos. Fluxos que podem ser considerados turbulentos são parte do dia-a-dia, estando especialmente relacionados com situações onde a viscosidade do fluido envolvido é pequena.

Como se elabora um tratamento científico para um fenômeno em que os parâmetros que deveriam descrever o estado físico do seu sistema não determinam de forma unívoca os resultados de experimentos realizados no sistema? A resposta a isso passa por observar que as medições experimentais realizadas em fluxos turbulentos fornecem respostas que: (1) São desorganizadas e apresentam variabilidade em todas as escalas de tempo, (2) são impredizíveis em seu comportamento específico, (3) algumas de suas propriedades são perfeitamente reproduzíveis experimentalmente. Uma teoria de turbulência deve ser uma teoria estatística,

[1] Seção coordenada por Sérgio Volchan

que seja capaz de predizer propriedades estatísticas destes resultados desorganizados de experimentos sobre fluxos turbulentos em termos dos parâmetros do fluxo.

Para simplificar a discussão, digamos que os fluxos que estamos considerando sejam fluxos incompressíveis, homogêneos e ligeiramente viscosos. A dinâmica deste tipo de fluxo, dentro de hipóteses físicas bastante modestas (e sem a presença de forças externas), é descrito pelas equações de Navier-Stokes incompressíveis:

$$\begin{cases} u_t + u \cdot \nabla u = -\nabla p + (1/R)\Delta u, \\ \text{div } u = 0, \end{cases}$$

onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ é a velocidade do fluido, p é a pressão e R é uma constante adimensional chamada de *número de Reynolds*, que reflete o valor típico do quociente entre forças inerciais e as forças viscosas presentes no fluxo. Na dedução das equações de Navier-Stokes aparece a relação:

$$R \sim \frac{LU}{\nu},$$

onde L é uma escala de comprimento típica do fluxo, U é uma velocidade típica e ν é o coeficiente de viscosidade cinemática do fluido em questão. Examinando fluxos que se encontram no dia-a-dia, verifica-se que situações em que o número de Reynolds é muito elevado são bastante comuns - Uma pessoa numa piscina experimenta fluxos com número de Reynolds $R \sim 10^4$, uma baleia vive sua vida em convivência com $R \sim 10^6$ e fluxos de fluidos de interesse em oceanografia e metereologia tem $R \sim 10^9$ a $R \sim 10^{12}$. Pode-se imaginar ingenuamente que, para tratamento científico estes fluxos, basta tomar como modelo o caso $R = \infty$, o que reduz as equações de Navier-Stokes às chamadas *equações de Euler* para fluxos ideais (sem viscosidade). Mas, existe, em algumas situações, uma grande diferença física entre fluxos sem viscosidade e fluxos com viscosidade infinitesimal. Esta diferença se deve essencialmente ao fato que as soluções das equações de Navier-Stokes são muito mal comportadas com respeito ao limite $R \to \infty$, basicamente devido ao aparecimento de turbulência nesse limite.

Em resumo, turbulência é um fenômeno ligado a fluxos com número de Reynolds grande (viscosidade pequena) que se constitui num aspecto importante de dinâmica de fluidos em certas situações de interesse prático, num contexto em que a linguagem clássica da dinâmica dos fluidos, ligada a soluções bem comportadas das equações de Euler e Navier-Stokes (fluxos laminares) não fornece um modelo adequado.

O pioneiro no estudo estatístico de turbulência foi G. I. Taylor em [2], começou a tratar a velocidade em fluxos turbulentos como uma familia parametrizada de variáveis aleatórias de forma sistemática. Taylor introduziu a função de correlação de dois pontos (que descreve o decaimento da influência do valor da velocidade em um ponto sobre a velocidade em outros pontos com respeito à distância entre eles) como uma parte fundamental na teoria estatística da turbulência e observou a relação fundamental, dada pela transformada de Fourier, entre o espectro de energia, interpretado fisicamente como a quantidade de energia contida nas diferentes escalas do fluxo e a função correlação de dois pontos. Diversos pesquisadores trabalharam, de forma mais ou menos independente no problema de modelagem de fluxos turbulentos, entre eles Taylor, von Karman, Heisenberg, Batchellor, Onsager e Kolmogorov, entre 1938 e 1948 (veja [1] para uma história mais detalhada e referências para a contribuição destes pesquisadores). Houve uma certa demora, em grande parte devida à interrupção do intercâmbio científico normal por causa da guerra, para que o trabalho de A. N. Kolmogorov em [3] fosse reconhecido como a teoria básica de turbulência, que serve de ponto de partida conceitual para praticamente tudo que foi feito posteriormente sobre o assunto.

Para discutirmos as idéias básicas por trás da teoria de Kolmogorov, vamos nos restringir ao caso (brutalmente) simplificado de turbulência homogênea e isotrópica, isto é, turbulência em que as propriedades estatísticas das variáveis aleatórias que descrevem o fluxo independem do ponto no espaço onde estas variáveis são avaliadas e suas distribuições são invariantes por rotações do espaço. Uma excelente aproximação experimental de turbulência homogênea e isotrópica pode ser obtida colocando-se uma malha bidimensional imersa em uma corrente e fazendo medições a uma certa distância "corrente abaixo"da malha, mas não muito longe. Dois fatos experimentais básicos sobre turbulencia homogênea e isotrópica são consistentemente obtidos:

1. A média quadrática (no tempo) dos incrementos de velocidade entre dois pontos que distam de l se comporta como $l^{2/3}$, para l pequeno.

2. Se $E = E(t, R)$ é a energia associada a um fluxo em número de Reynolds R, então o limite de dE/dt, a taxa de dissipação de energia, quando $R \to \infty$ tende a uma quantidade positiva $\varepsilon_0 > 0$.

A teoria de Kolmogorov é uma teoria fenomenológica. Ela não parte de principios fisicos fundamentais, que neste caso seria uma teoria de turbulência rigorosamente fundamentada nas equações de Navier-Stokes, algo muito desejável cientificamente e longe de estar disponível no momento. A teoria de Kolmogorov parte de um conjunto de axiomas "ad hoc", compatíveis com as observações disponíveis e obtem ferramentas analíticas para fazer outras previsões a partir deste conjunto de axiomas. Uma maneira de descrever os axiomas de Kolmogorov são as hipóteses abaixo.

(K1) No limite de número de Reynolds alto, as simetrias das soluções de Navier-Stokes, geralmente quebradas no decorrer do processo que leva à turbulência, são restauradas nas escalas pequenas (escalas muito menores do que a escala onde ocorre injeção de energia no fluxo) e longe das fronteiras.

(K2) Sob as mesmas hipóteses, fluxo turbulento é auto-similar, isto é, existe um expoente $h > 0$ tal que $\Delta u(\lambda l) = \lambda^h \Delta u(l)$ para todo $\lambda > 0$, onde $\Delta u(l)$ é a diferença das velocidades entre dois pontos à distância l.

(K3) Fluxo turbulento tem uma taxa finita e positiva de dissipação de energia por unidade de massa, denotada por ε_0.

Para cada $1 < p < \infty$, definimos a função de estrutura $S_p = S_p(|l|)$ por:

$$S_p(|l|) = \left\langle \left((u(x + l, t) - u(x, t)) \cdot \frac{l}{|l|} \right)^p \right\rangle,$$

onde $\langle \cdot \rangle$ denota média no tempo.

O resultado principal da teoria de Kolmogorov pode ser expresso da seguinte forma:

Teorema: (Lei $-4/5$ de Kolmogorov) As hipóteses (K1), (K2) e (K3) implicam que

$$S_3(|l|) = -\frac{4}{5}\varepsilon_0 |l|.$$

Um corolário, obtido via análise dimensional, é que $h = 1/3$. O comportamento assintótico de todas as quantidades físicas associadas ao limite $R \to \infty$ podem ser calculados utilizando a Lei $-4/5$. Por exemplo, a escala de dissipação de Kolmogorov é a escala de comprimentos, chamada η, a partir da qual o fluxo é dominado pela viscosidade, e é a escala em que energia é dissipada. A teoria de Kolmogorov prevê:

$$\eta = \left(\frac{1}{\varepsilon_0 R^{1/3}}\right)^{1/4}.$$

A demonstração da Lei $-4/5$ envolve um estudo do orçamento de energia em cada escala do fluxo e o efeito da não-linearidade quadrática tipo Navier-Stokes no acoplamento entre escalas diferentes.

A teoria de Kolmogorov tem excelente concordância com experimentos, mas existem indicações que ela não seja verdadeira exatamente. As correções mais comuns envolvem utilizar mais de um expoente na hipótese (K2), o que caracteriza teorias *multifractais* de turbulência. Existem indicações experimentais que turbulência homogênea e isotrópica seja de fato multifractal. Existem também outras teorias de turbulência diferentes ou complementares com relação à teoria de Kolmogorov, talvez a vertente alternativa mais importante seja baseada em idéias de teoria quântica dos campos e usualmente referidas como teorias de grupos de renormalização. Note que Kolmogorov é, indiscutivelmente, um dos grandes matemáticos do século XX. No entanto ele aparece neste tema como o proponente principal de uma teoria *física* fundamental. De fato, uma parte importante das contribuições de Kolmogorov à matemática contemporânea, especialmente em sistemas dinâmicos e em teoria de probabilidades, podem ser vistas como preocupações oriundas, em última análise, do problema da turbulência.

O livro de U. Frisch é um livro texto para um curso introdutório sobre turbulência, adequado para alunos ou pesquisadores com alguma sofisticação física. É um livro extremamente claro e atraente, justamente numa área importante em que a literatura costuma ser de acesso muito difícil. O livro resgata a centralidade da teoria de Kolmogorov para a discussão sobre turbulência, algo necessário pois a literatura nem sempre parece ter claro que foi que Kolmogorov fez. Partindo de primeiros princípios, a maior parte do livro, Capitulos 1-7, é dedicada a uma derivação pormenorizada e uma discussão aprofundada da teoria de Kolmogorov, cobrindo os detalhes do que foi brevemente descrito acima. O Capítulo 8 é uma descrição dos principais refinamentos da teoria de Kolmogorov, principalmente correções multifractais. O último Capítulo faz uma revisão da literatura na área, apontando o leitor para diversas avenidas de leitura adicional. O texto é um exercicio simultâneo de erudição profunda e sedução. O autor U. Frisch é um físico matemático, olhando seu tema com um ponto de vista definitivamente físico, mas demonstrando uma apreciação notável da matemática desenvolvida em torno e ao redor da sua área, veja por exemplo a discussão sobre a relação da teoria de sistemas dinâmicos com turbulência na seção 9.4. O que não surpreende, pois Prof. Frisch tem colaborado com diversos matemáticos eminentes ao longo de sua extensa carreira.

Referências

[1] G. K. Batchellor, *The theory of Homogeneous Turbulence*, Cambridge Univ. Press, Cambridge U.K., 1953.

[2] G.I. Taylor, *Statistical Theory of Turbulence I-IV*, Proc. Roy. Soc. London A, **151**, (1935), 421-478.

[3] A. N. Kolmogorov, *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid with very large Reynolds number*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **30** (1941) 9-13, reimpresso em Proc. Roy. Soc London A **434** (1991) 9-13.

IMECC
UNICAMP
Caixa Postal: 606513081-970
Campinas - SP