MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 31 – dezembro 2001 – pp. 165-168

Resenhas de Livros[1]

Sobre *Free Algebras and PI-Algebras – Vesselin Drensky, Springer, Graduate Course in Algebra* de

Plamen Koshlukov

Descrever, em certos termos, uma classe de objetos algébricos, é um problema de grande importância. E de enorme dificuldade também. Portanto restringimos a nossa atenção a algumas classes de objetos algébricos (grupos, anéis, álgebras sobre corpo), que são relativamente amplas e interessantes. Uma tal classe é a das álgebras que satisfazem identidades polinomiais, chamadas de PI álgebras. Se K é um corpo fixo, então todas K-álgebras comutativas são PI, todas álgebras de dimensão finita também são. Para esclarecer esses conceitos, definiremos a álgebra associativa livre $K(X)$, livremente gerada por um conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ de variáveis não comutativas. Como um K-espaço vetorial, uma base de $K(X)$ é formada por todos monômios (isto é, por todas palavras no alfabeto X). A multiplicação em $K(X)$ é simplesmente a induzida pela concatenação de monômios. Os elementos de $K(X)$ são chamados *polinômios*. O polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in K(X)$ é uma identidade polinomial (PI) na álgebra A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A$.

Nesta direção, podemos considerar os seguintes problemas.

1. Dada uma K-álgebra A, descrever todas identidades polinomiais satisfeitas por A. O conjunto dessas PI é um ideal em $K(X)$ que é indicado por $T(A)$ e é chamado de T-ideal de A. Observe que $T(A)$ é fechado com respeito a endomorfismos de $K(X)$.

[1]Seção coordenada por Sérgio Volchan

2. Descrever as K-álgebras que satisfazem todas PI de $T(A)$. Esta classe de álgebras é chamada a variedade $var(A)$ determinada por A (ou por $T(A)$).

3. Descrever a álgebra quociente $K\langle X\rangle/T(A)$. Esta álgebra é a álgebra relativamente livre na variedade $var(A)$, e ela providencia informação sobre a variedade $var(A)$.

   Podemos acrescentar mais um problema importante.

4. Quais são as propriedades de uma PI álgebra? Isto é, qual a estrutura de uma álgebra, sabendo-se que ela satisfaz alguma identidade polinomial.

O livro de Vesselin Drensky considera vários aspectos principalmente dos primeiros três problemas. Ressaltamos que o quarto foi historicamente o primeiro a ser estudado. Os resultados mais importantes nesta direção podem ser encontrados em várias monografias sobre PI álgebras tais como o excelente livro de C. Procesi, ou o mais enciclopédico de L. H. Rowen.

O livro de V. Drensky trata principalmente de problemas e métodos combinatórios na PI teoria. Recordamos que isso não pode ser considerado uma restrição pois esta teoria utiliza pesadamente resultados e idéias que vêm da teoria de anéis, e ainda mais da álgebra combinatorial, teoria de representações de grupos, invariantes, entre outros. E, aparentemente os métodos combinatórios são extremamente eficientes, como mostram os resultados da pesquisa na área, onde o autor do livro tem contribuido extensivamente.

Os primeiros resultados significativos da utilização da combinatória algébrica no estudo de PI álgebras surgiram em torno de 1950–1960. Entre eles são o teorema de Amitsur e Levitzki, o teorema de Shirshov sobre a altura. Nas décadas seguintes foram estabelecidos resultados notáveis tais como o teorema de Regev sobre o produto tensorial de PI álgebras, os estudos sistémicos de Procesi e Razmyslov sobre os invariantes de álgebras relativamente livres, que resultaram na descrição das identidades com traço da álgebra matricial $M_n(K)$ de ordem n, a existência de polinômios centrais em $M_n(K)$ (estabelecida por Formanek e por Razmyslov). Em 1973, Razmyslov exibiu um conjunto finito de geradores do T-ideal $T(M_2(K))$ quando K é um corpo de característica

0. Em 1950, Specht propôs o seguinte problema. *Se A é uma álgebra (associativa) sobre um corpo de característica 0, então $T(A)$ é finitamente gerado como T-ideal?* A resposta positiva do problema de Specht foi dada por Kemer, em 1987. (Ressaltamos que nem tem-se idéia de que identidades pode ser composta uma base de geradores para o T-ideal $T(M_3(K))$.)

O livro em questão foi planejado como uma versão bem ampliada de um curso para alunos de pós-graduação. Os prerequisitos são mínimos, o leitor precisa conhecer bem a álgebra linear e as propriedades básicas de grupos, anéis e álgebras. Além disto, os primeiros dois capítulos do livro contêm uma boa parte dos prerequisitos em uma forma clara e enxuta. No Capítulo 3, discute-se a solução negativa do problema de Specht no caso de álgebras de Lie sobre corpo de característica positiva. Os próximos dois capítulos contêm resultados básicos na PI teoria bem como exemplos importantes e clássicos de identidades em álgebras concretas. Depois o autor introduz ferramentas potentes que vêm da álgebra comutativa e da teoria de invariantes.

Capítulos 7, 8, 9 e 12 formam o primeiro núcleo do livro. A exposição dos resultados mostra a eficiência dos métodos combinatoriais. Discutem-se em detalhes as identidades polinomiais satisfeitas por álgebras matriciais, polinômios centrais, codimensões de T-ideais, o teorema de Shirshov sobre a altura, a dimensão de Gelfand e Kirillov, entre outros tópicos. Em capítulo 12 encontram-se alguns dos resultados mais importantes da PI teoria. Os principais métodos são os das representações dos grupos simétrico e geral linear.

Nos capítulos 10 e 11 estudam-se automorfismos de álgebras livres e relativamente livres, nos casos associativo e de Lie.

A monografia em questão é um excelente livro, cujo autor apresentou muito bem vários tópicos da teoria de PI álgebras. O livro começa num nível bastante elementar e logo chega a assuntos avançados e pesquisas recentes e/ou ainda em desenvolvimento. A matéria exposta foi selecionada com bom gosto e apresentada em uma maneira objetiva. Nenhum tópico de importância na PI teoria ficou fora das considerações do livro. Os enunciados de definições, teoremas etc. são claros e rigorosos, as demonstraçõesz são completas e precisas. Os exemplos e exercícios fornecidos completam o texto. Eles não são rotineiros nem técnicos, mas sim uma extensão do material exposto. (Recordamos que uma leitura eficiente do livro exige a resolução de uma boa parte dos exercícios e leitura de artigos de pesquisa, para consultar o já feito.) Ressaltamos que inúmeros exercícios são baseados em resultados de pesquisa (em muitos casos recente), e tais exercícios vêm com dicas completas ou com referências bibliográficas. Um grande número de exercícios é de tipo "caso particular de problema aberto". O autor destaca o problema referido, comenta a situação atual, providencia as referências necessárias de tal modo que o interessado poderia começar a se aprofundar em pesquisa sobre o assunto. A bibliografia é excelente e inclui a maioria dos títulos importantes na área: livros–monografias bem como artigos de pesquisa importantes.

O livro de V. Drensky será extremamente útil para alunos de pós-graduação interessados em teoria de anéis. Os pesquisadores na área, mesmo experientes ou jovens, encontrarão resultados, métodos e referências valiosos neste belo livro. O livro pode servir como base para várias disciplinas em programas de pós-graduaçào em álgebra, bem como seminários de estudo e pesquisa.

Enfim, gostaria de recomendar *fortemente* este livro a todas bibliotecas de universidades com programas de pós-graduação em matemática, e ainda mais a todos interessados em pesquisa na área de álgebra, especialmente teoria de anéis.

IMECC, UNICAMP, Cx. P. 6065
Cidade Universitária "Zeferino Vaz"
Campinas, SP, Brasil
CEP: 13083-970
plamen@ime.unicamp.br