

Métodos de Construção de Variedades de Dimensão Três

Eliza Ramos de Andrade

1 Introdução

O estudo das variedades topológicas de dimensão três é, em muitos aspectos, a generalização do estudo das variedades topológicas de dimensão dois, ou superfícies. Uma variedade topológica de dimensão n é um espaço topológico de Hausdorff tal que cada ponto possui vizinhança homeomorfa a um aberto do R^n . Neste texto consideramos variedades topológicas, fechadas (compactas e sem bordo), conexas e orientáveis. A propriedade que define uma superfície S é local: ao redor de um ponto qualquer em S existe uma vizinhança aberta homeomorfa a um aberto do R^2 , ou seja, um disco aberto. Se nos deslocarmos um pouco sobre a superfície, ao redor de outro ponto próximo observaremos outro disco. Um objetivo interessante é obter uma análise global das superfícies ao invés de entendê-las localmente. Isto envolve classificá-las, isto é, obter uma lista sem repetição contendo todas elas, e reconhecê-las, ou seja, poder dizer onde uma dada superfície está na lista.

A classificação das superfícies é um resultado clássico da topologia; diz que uma dada superfície é, a menos de um homeomorfismo, a esfera ou uma soma conexa de toros (lembramos que neste texto as superfícies são fechadas, conexas e orientáveis). A vantagem das superfícies sobre as variedades de dimensão maior é a possibilidade de visualização. Toda superfície pode ser mergulhada no espaço euclidiano R^3 , um local onde conseguimos “enxergá-la”. Existem muitas maneiras de obtermos

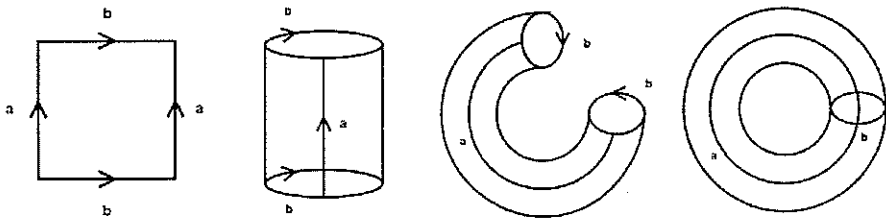


Figura 1: A identificação de pares de lados de um quadrado como indicado acima gera um toro.

superfícies. Por exemplo, podemos identificar os lados de um quadrado para obter um toro, como mostra a figura 1.

Esta identificação é feita através de um homeomorfismo de colagem entre as arestas do quadrado. De maneira geral, em um polígono de $2n$ lados podemos fazer identificações entre pares de arestas para obter uma superfície; todas as superfícies podem ser obtidas através desse processo (Radó [16], 1924). Podemos também descrever essas colagens através de um espaço quociente. Definimos uma relação de equivalência no polígono (como um espaço topológico) que é a colagem de pares de seus lados. Com isso, obtemos o espaço quociente por esta relação de equivalência, que é a superfície resultante.

Neste artigo serão apresentados três métodos de construção de variedades de dimensão três:

- Método Combinatório
- Método de Heegaard
- Cirurgia de Dehn

Nosso objetivo com as variedades de dimensão três é o mesmo do caso bidimensional; queremos estudá-las globalmente, isto é, gostaríamos de obter uma classificação, e saber reconhecê-las nesta lista. Porém, a classificação das variedades de dimensão três talvez seja o maior problema em aberto da topologia hoje. Por que existe tal dificuldade? Os métodos de construção apresentados neste artigo geram um grande número de variedades, tornando o processo de classificá-las uma tarefa difícil. Outro problema está em obter bons invariantes algébricos. As superfícies possuem bons invariantes algébricos, como a característica de Euler e o grupo fundamental; duas superfícies são homeomorfas se e

somente se seus grupos fundamentais forem isomorfos. Mas os invariantes algébricos em variedades de dimensão três conhecidos (como por exemplo homologia e cohomologia) não são suficientemente poderosos para dar informações sobre uma classificação.

Veremos as vantagens e desvantagens de cada método de construção. Surgirão muitos exemplos de variedades de dimensão três, alguns muito simples e intuitivos e outros bastante complexos; iremos perceber as dificuldades em reconhecê-las e, principalmente, em obter uma classificação. Agradeço a Claudio Gorodski pelas sugestões e comentários e a Sandro Moscatelli e Henrique Guidi pela ajuda com as figuras.

2 Método Combinatório

No caso bidimensional, fazíamos as identificações dos lados de um polígono regular para obter uma superfície. Vamos fazer o análogo para obter uma variedade de dimensão três. Identificaremos as faces um poliedro sólido. Este método apareceu inicialmente no trabalho *Analysis Situs* [15] de Poincaré em 1895. É interessante que Poincaré considera as variedades obtidas por este método mergulhadas em R^4 , e enfatiza que se a variedade pode ser decomposta em pedaços homeomorfos a poliedros em R^3 de tal forma que a intersecção destes pedaços correspondem a faces do poliedro, então, se conhecermos o poliedro e a maneira como suas faces são identificadas, teremos uma imagem da variedade, que é suficiente para estudarmos suas propriedades. Os primeiros exemplos de variedades obtidas por este método aparecem em *Analysis Situs*, como a variedade obtida pela identificação das faces opostas do cubo por reflexão no plano paralelo entre as duas faces (lembramos que se identificarmos as faces de um quadrado, obtemos um toro), a variedade descrita é o toro em dimensão três T^3 .

Será que este método sempre fornecerá variedades de dimensão três? Observe que só é possível obtermos uma variedade de dimensão três se pegarmos um poliedro com número par de faces, e se duas faces forem identificadas elas devem ter o mesmo número de arestas. Essas identificações (homeomorfismos) que fazemos não são físicas mas sim abstratas, pois o resultado está mergulhado em um espaço euclidiano de dimensão quatro, que não conseguimos visualizar. Adiante ficará mais claro o que queremos dizer com identificação abstrata. Para simplificar, ao invés de

considerarmos a identificação dos lados de um poliedro sólido, vamos identificar um número finito de tetraedros face a face. O matemático E. Moise demonstrou em 1952 que todas as variedades de dimensão três podem ser trianguladas (veja [12]), portanto toda variedade de dimensão três é união de tetraedros sólidos com interiores disjuntos e com exatamente dois tetraedros encontrando-se em cada face.

Sem entrar em detalhes da definição, recordemos que um 0-simplexo é representado por um ponto, um 1-simplexo por um segmento de reta (e as faces deste simplexo são os pontos que unem o segmento), um 2-simplexo por um triângulo (cujas faces agora são as retas que formam o triângulo) e um 3-simplexo por um tetraedro sólido (as faces do 3-simplexo são as faces do tetraedro). Uma coleção de simplexos no espaço euclidiano R^3 é chamado um complexo simplicial de dimensão três, ou 3-complexo, se sempre que um simplexo está na coleção, então cada uma de suas faces também está e dois simplexos sempre se intersectam em uma face comum. Dizemos que uma variedade de dimensão três é triangulável se é homeomorfo à reunião de uma coleção finita de simplexos (que forma um 3-complexo) considerada como espaço topológico.

Assim sendo, dado um 3-complexo, gostaríamos de saber se ele representa uma variedade de dimensão três. Precisamos verificar que todo ponto no espaço resultante possui vizinhança homeomorfa a uma bola aberta do R^3 . Há quatro tipos de pontos para considerar:

Pontos interiores: Esse caso é imediato. Todo ponto no interior de um tetraedro possui vizinhança homeomorfa a um aberto do R^3 .

Pontos nas faces: Um ponto em uma face de um tetraedro possui uma vizinhança que é meia bola aberta. Quando identificamos esta face com outra obtemos a outra meia bola. Portanto, no espaço resultante os pontos nas faces possuem vizinhança como uma bola aberta, que é um aberto do R^3 .

Pontos nas arestas: Os pontos nas arestas possuem uma vizinhança que é como uma cunha aberta (fig.2). Quando fazemos as identificações obtemos várias cunhas abertas coladas. Basta notar que imagem de uma fatia transversal à cunha (veja fig.2) é um disco em R^2 . Ao longo de uma aresta vamos identificando os tetraedros, mas esse processo é finito pois a variedade é fechada. Então, se começarmos a caminhar ao redor do vértice central que está na imagem da fatia transversal em algum momento retornaremos ao ponto em que partimos. Logo, esse

caminho que fizemos é uma curva fechada, ou seja, o espaço que foi englobado pela curva é um disco aberto do R^2 . Assim, o ponto na aresta (que corresponde ao ponto ao redor do qual fizemos a caminhada) possui vizinhança que é como um cilindro aberto (fig.2), que é homeomorfo a um aberto do R^3 .

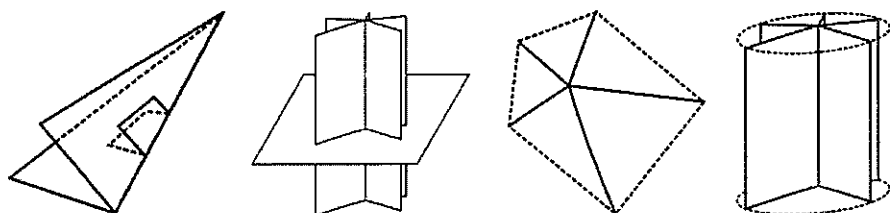


Figura 2: Antes das identificações, os pontos nas arestas possuem vizinhança como cunhas abertas. Quando vamos identificando, obtemos várias cunhas coladas. Basta observar que a imagem transversal à cunha é um disco em R^2 .

Pontos nos vértices: Antes das identificações, pontos nos vértices têm uma vizinhança que é como um tetraedro aberto. Para simplificar, vamos pensar nessas vizinhanças como pirâmides em triângulos, onde o ápice da pirâmide é o vértice em questão (fig.3). As identificações ocorrem ao longo das faces que não são bases das pirâmides. Quando vamos identificando os tetraedros, vamos também identificando os triângulos que são bases das pirâmides (fig.3), chamemos esses triângulos de triângulos da base. Esses triângulos identificados formam uma variedade de dimensão dois fechada ao redor do vértice em questão.

Será que essa variedade é a esfera S^2 ? É possível que não! Usaremos a característica de Euler para saber quando essa variedade é a esfera S^2 . Vamos relacionar o número de vértices, arestas e faces (V_2, A_2, F_2) nos triângulos da base somados sobre todos os vértices no 3-complexo com o número de arestas, faces e tetraedros (A_3, F_3, T_3) no 3-complexo. Para cada aresta de um tetraedro há dois vértices do tetraedro, e consequentemente dois triângulos da base correspondentes a esses vértices. Nessa aresta do tetraedro temos dois vértices da cada triângulo da base. Se somarmos sobre todos os tetraedros teremos a relação $V_2 = 2A_3$. Com raciocínio análogo, encontramos as relações $A_2 = 3F_3$ e $F_2 = 4T_3$.

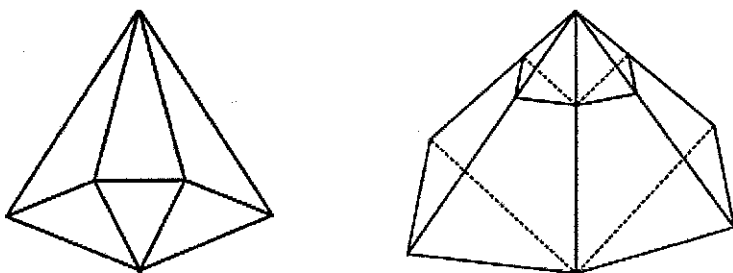


Figura 3: Podemos considerar as vizinhanças de um vértice como pirâmides em triângulos, como está indicado na figura à direita. Quando vamos identificando os tetraedros, vamos também identificando os triângulos da base. Esses triângulos identificados formam uma variedade de dimensão dois fechada ao redor do vértice em questão (veja a figura à esquerda)

Segundo a fórmula da característica de Euler encontramos:

$$V_2 - A_2 + F_2 = 2A_3 - 3F_3 + 4T_3.$$

Cada tetraedro possui quatro faces, mas como cada face é identificada com outra de outro tetraedro, então $F_3 = 4T_3/2 = 2T_3$. Juntando isso com a fórmula anterior:

$$V_2 - A_2 + F_2 = 2A_3 - 2F_3 + 2T_3.$$

Agora, cada vizinhança dos V_3 vértices é localmente homeomorfa à bola aberta do R^3 se e somente se $V_2 - A_2 + F_2 = 2V_3$ (já que a característica de Euler da esfera S^2 é 2), o que acontece se e somente se:

$$2A_3 - 2F_3 + 2T_3 = 2V_3.$$

Portanto o 3-complexo é uma variedade de dimensão três se e somente se:

$$V_3 - A_3 + F_3 - T_3 = 0.$$

Assim, todas as variedades de dimensão três possuem característica de Euler igual a zero! O teorema de Moise garante que todas as variedades de dimensão três podem ser construídas através da identificação de um número finito de tetraedros sólidos. Se obtermos duas variedades diferentes através desse método, como saberemos se elas são homeomorfas ou não? A característica de Euler não nos ajuda agora pois em todas as variedades ela é zero. O método combinatório é intuitivo, mas de visualização difícil.

3 Método de Heegaard

Tentemos visualizar mais exemplos de variedades de dimensão três. Vamos exibir algumas definições da esfera S^3 . Para obtermos S^2 identificávamos dois discos em R^2 ao longo de suas fronteiras (fig.4).

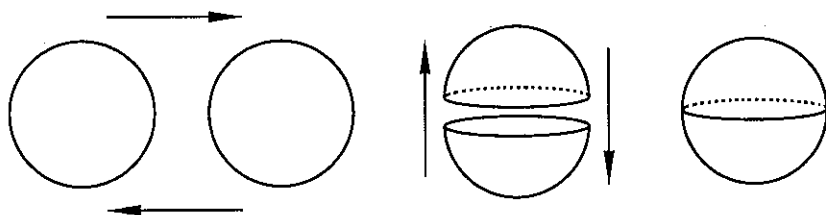


Figura 4: A identificação de dois discos em R^2 gera a esfera S^2 .

Vamos fazer o análogo em dimensão maior, ou seja, vamos identificar duas bolas sólidas ao longo de suas fronteiras. Existe um resultado de Rolfsen [17] mostrando que a esfera S^3 é a única variedade de dimensão três obtida pela identificação de duas bolas sólidas ao longo de suas fronteiras. Não iremos colar as duas fronteiras fisicamente, devemos pensar no processo de maneira abstrata. É como se uma pessoa estivesse dentro de uma bola e fosse andando em direção à fronteira até que conseguiria passar de uma bola para a outra, devido à identificação. É fácil ver que esta definição de S^3 satisfaz a propriedade de variedade de dimensão três. Um ponto dentro de uma das bolas possui, trivialmente, vizinhança homeomorfa a um aberto de R^3 . Pontos na fronteira de uma

das bolas possuem vizinhança como meia bola aberta; quando fazemos as identificações obtemos a outra meia bola (fig.5).

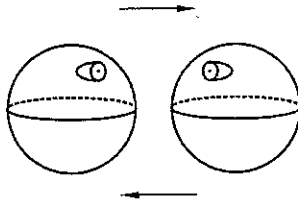


Figura 5: A identificação de duas bolas sólidas ao longo das fronteiras é uma variedade de dimensão três, a esfera S^3 .

Há outra descrição de S^2 . Podemos fazer a identificação de dois discos ao longo de suas fronteiras sem sair de R^2 da seguinte maneira: tome dois discos em R^2 , retire o centro e um raio de um deles (fig.6). Então vamos englobando um disco no outro ao longo das fronteiras. O que fica por fora é aberto, portanto podemos “esticar” esse disco por todo o plano. Finalmente, colamos as duas fronteiras e o raio que foi retirado. Falta devolver ao plano o centro do disco que retiramos; o denotamos por ∞ e dessa maneira temos $S^2 = R^2 \cup \{\infty\}$.

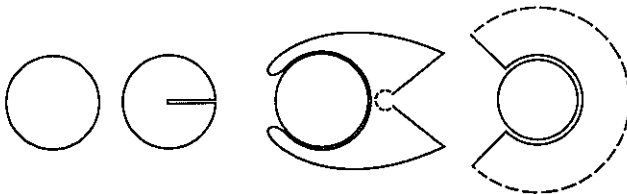


Figura 6: Tome dois discos em R^2 , retire o centro e um raio de um deles. Englobe um disco no outro de forma que as duas fronteiras sejam identificadas.

Podemos fazer o análogo para S^3 , onde $S^3 = R^3 \cup \{\infty\}$. A visualização nesse caso ainda é possível. Os pontos com distância à origem menor ou igual a um formam a primeira bola, B_1 . Os pontos com distância à origem maior ou igual a um junto com o ponto extra $\{\infty\}$ formam a bola B_2 . Os pontos que estão dentro de B_1 possuem distância

à origem como sendo a euclidiana usual. Nos pontos a uma distância d da origem que é maior ou igual a um, definimos sua distância à $\{\infty\}$ como sendo $1/d$. Portanto, quanto mais longe estamos de B_1 , mais perto estamos de $\{\infty\}$. Isto nos leva a considerar o ponto $\{\infty\}$ como o centro da bola B_2 .

Vamos agora identificar dois toros sólidos ao longo de suas fronteiras; veremos que desta vez diferentes escolhas de identificações geram variedades distintas. Primeiro vamos identificar cada curva meridiano de um toro com uma curva paralelo do segundo. Para que a identificação seja injetora devemos impor que cada meridiano de um toro será levado a somente um paralelo do outro. A identificação descrita anteriormente gera S^3 , para a nossa surpresa! Podemos enxergar este fato se cortarmos o primeiro toro ao longo de dois meridianos (fig.7). Cole um dos pedaços resultantes deste corte no segundo toro, de forma que cada meridiano do primeiro é levado a somente um paralelo no segundo (fig.7). O resultado desta colagem é a bola sólida. Mas o pedaço restante do primeiro toro onde fizemos o corte também é uma bola sólida. Portanto, identificar dois toros sólidos ao longo de suas fronteiras levando cada curva meridiano do primeiro em um paralelo do segundo é equivalente a identificar duas bolas sólidas ao longo de suas fronteiras. Pelo resultado de Rolfsen citado anteriormente, temos que a variedade de dimensão três resultante desta identificação de dois toros sólidos ao longo de suas fronteiras é S^3 .

Poderíamos tentar identificar um meridiano do primeiro toro a um (único) meridiano do segundo e ao mesmo tempo identificar um paralelo do primeiro a um paralelo do segundo. Portanto, cada curva meridiano de um toro será levada à curva meridiano correspondente no segundo. Que espécie de variedade será resultante agora? Cada disco meridional será identificado com um disco meridional no outro toro. A identificação de dois discos sólidos gera a esfera S^2 , logo os pares de discos meridionais formam esferas S^2 na variedade resultante. Seja L uma curva paralelo no primeiro toro. Em cada ponto x ao longo de L há uma esfera S^2 perpendicular a L na variedade resultante que denotamos por $S^2 \times S^1$, ela é uma variedade de dimensão três diferente de S^3 .

Descrevemos duas variedades diferentes, S^3 e $S^2 \times S^1$, obtidas pela identificação de dois toros sólidos ao longo de suas fronteiras. No primeiro caso identificamos um meridiano do primeiro toro com um paralelo do outro, no segundo caso identificamos um meridiano do primeiro com

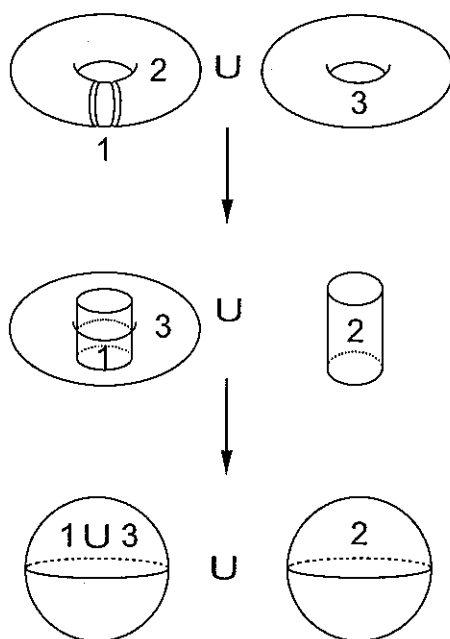


Figura 7: Se identificarmos um meridiano do primeiro toro com um paralelo do segundo, obteremos a esfera S^3 .

um meridiano do segundo. De maneira geral, podemos identificar um meridiano do primeiro toro com qualquer curva fechada que não se intersecta no segundo. Tal curva é chamada *curva* (p, q) . Uma curva (p, q) é construída da seguinte maneira: desenhe um paralelo e um meridiano no toro, onde a curva está. O número de vezes que a curva atravessa o paralelo (meridiano) é o parâmetro p (q). Veja na figura abaixo uma curva $(3, 2)$.

Chamamos de *espaços lenticulares* $L(p, q)$ variedades de dimensão três obtidas pela identificação de dois toros sólidos ao longo de suas fronteiras, onde o meridiano do primeiro é levado a uma curva (p, q) no segundo. Este exemplo foi anunciado por H. Tietze em 1908 (veja [22])

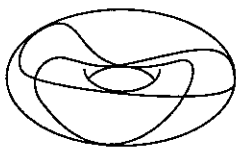


Figura 8: Uma curva $(3, 2)$ em um toro.

como um dos exemplos mais simples possíveis de uma variedade de dimensão três obtida pela identificação das faces de um poliedro sólido. A idéia de construção de Tietze foi a seguinte: na superfície da bola sólida B^3 desenhamos um círculo equatorial e p meridianos igualmente separados que separam o hemisfério superior em $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_p$ triângulos, e o hemisfério inferior em $\Delta'_1, \Delta'_2, \dots, \Delta'_p$ triângulos, com Δ'_i abaixo de Δ_i (fig.9). Então, o hemisfério superior é identificado com o inferior após uma torção de $2\pi(q/p)$, onde p e q são primos entre si. Tietze também notou que este modelo coincide com a definição inicial dada.

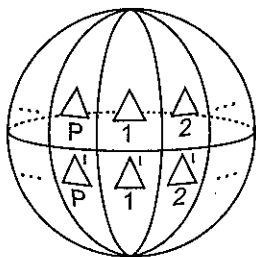


Figura 9: O hemisfério superior é identificado com o inferior após uma torção de $2\pi(q/p)$, onde p e q são primos entre si. Obtemos dessa forma os espaços lenticulares, $L(p, q)$.

Podemos generalizar mais ainda, identificando dois toros sólidos de gênero n ao longo de suas fronteiras. Perceba que existem inúmeras maneiras de fazermos estas identificações; e de fato podemos obter todas as variedades de dimensão três por esse processo, que chamamos de *método de Heegaard*. Poderíamos assim começar a fazer uma lista de todas as

variedades de dimensão três, ou seja, conseguir classificá-las. Começariamos listando todas as variedades obtidas pelo método de Heegaard com toros de gênero zero, e obtemos a esfera S^3 . Depois listamos as variedades obtidas com toros de gênero um, e temos os espaços lenticulares, e assim por diante. Porém, este processo não nos ajuda a obter uma lista, sem repetição, de todas as variedades de dimensão três porque até hoje ninguém conseguiu listar as variedades obtidas pelo método de Heegaard com toros de gênero dois.

4 Conjectura de Poincaré e Cirurgia de Dehn

Poincaré formulou por volta de 1900 a seguinte conjectura: Se M é uma variedade de dimensão três fechada, conexa e simplesmente conexa, então M é homeomorfa à esfera S^3 . Em dimensão quatro, porém, a variedade $S^2 \times S^2$ é fechada, conexa e simplesmente conexa, mas não é homeomorfa à esfera S^4 . Mesmo assim, existe um teorema análogo à conjectura em dimensão maior: uma variedade n -dimensional fechada que tem o mesmo tipo de homotopia da esfera S^n é homeomorfa a S^n . Essa conjectura generalizada foi provada para $n > 4$ por S.Smale [18] em 1961. O caso $n = 4$ foi provado por Michael Freedman [6] em 1982, entretanto a versão clássica em dimensão três ainda está sem solução¹. Como começaríamos a tentar provar a conjectura? Mencionamos que toda variedade de dimensão três fechada e conexa pode ser construída pelo método de Heegaard entre toros de gênero n ; então para provar a conjectura bastaria mostrar que se uma variedade de dimensão três obtida através do método de Heegaard é simplesmente conexa, então ela é homeomorfa à esfera S^3 . Este método teve sucesso no caso do método de Heegaard entre toros de gênero um e dois, mas até hoje ninguém conseguiu mostrar que um contra-exemplo para a conjectura de Poincaré não poderia vir do método de Heegaard entre toros de gênero três ou mais.

Na tentativa de esclarecer a conjectura de Poincaré, o matemático Max Dehn [5] elaborou, por volta de 1910, uma técnica nova para ob-

¹Trabalhos muito recentes de Grigori Perelman ([13] ou [14]) desenvolvendo a teoria de Richard Hamilton indicam uma possível prova da conjectura em dimensão três, entretanto os trabalhos publicados por Perelman levarão meses para serem avaliados e considerados como prova da conjectura.

ter variedades de dimensão três. No início dos anos 60 esta técnica foi aperfeiçoada com a ajuda da teoria dos nós. O exterior de um nó é o complementar de um toro aberto enlaçado como um nó. O toro aberto que removemos chama-se vizinhança tubular do nó. Vamos fazer a identificação de um toro sólido com o exterior de um nó ao longo de suas fronteiras. Dado um nó K em S^3 , a operação de retirar uma vizinhança tubular do nó e depois fazer a identificação com um toro sólido ao longo das fronteiras de maneira que cada curva meridiano do primeiro é identificado com uma curva (p, q) na fronteira do nó exterior é chamado *cirurgia de Dehn* (fig.10).

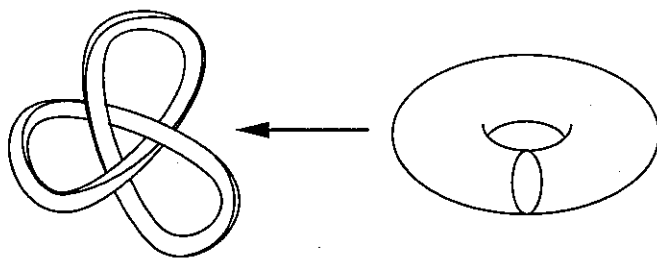


Figura 10: A identificação de um meridiano de um toro com uma curva (p, q) na fronteira de um nó exterior é chamada de Cirurgia de Dehn.

Observe que fazer a identificação de dois toros sólidos ao longo de suas fronteiras é um caso especial de cirurgia de Dehn. Para fazer a cirurgia de Dehn em um nó trivial (nó como um toro) primeiro removemos uma vizinhança tubular de um nó trivial em S^3 . Assim, a fronteira do exterior do nó trivial é somente um toro sólido. Agora fazemos a identificação com outro toro sólido identificando cada meridiano deste com uma curva (p, q) do segundo. Esta descrição coincide com os espaços lenticulares $L(p, q)$. Os espaços $L(p, q)$ surgem da cirurgia de Dehn em um nó trivial.

Poderíamos fazer a cirurgia de Dehn em um entrelaçamento de nós (vários nós atados uns aos outros) em S^3 . Para cada componente do

entrelaçamento, retiramos uma vizinhança tubular e fazemos a identificação com um toro sólido. Como temos muitas escolhas de entrelaçamento e de curvas (p, q) para fazer as identificações, é de se esperar que podemos obter inúmeros tipos de variedades de dimensão três por cirurgia de Dehn. De fato, por volta de 1960 Raymond Lickorish [10] e Andrew Wallace [23] obtiveram independentemente um resultado mostrando que toda variedade de dimensão três é obtida através de cirurgia de Dehn em um entrelaçamento de nós em S^3 .

Porém, mesmo com este grande resultado, obter uma lista completa e sem repetição de todas as variedades de dimensão três obtidas por cirurgia de Dehn não é suficiente para entendê-las globalmente. O problema de saber se duas destas variedades são homeomorfas ou não ainda persiste. Por exemplo, pensando em cirurgia de Dehn em nós simples (sem entrelaçamentos); poderíamos perguntar se existe mais de uma cirurgia em um nó K em S^3 que gera S^3 novamente. Uma cirurgia é a seguinte: retiramos uma vizinhança tubular de um dado nó K em S^3 . Então identificamos um meridiano do primeiro toro com um meridiano da fronteira do nó exterior. Observe que estamos somente preenchendo o que está faltando em S^3 . O resultado é S^3 novamente.

A pergunta então é: poderia haver uma segunda cirurgia de Dehn que identifica um meridiano de um toro sólido com uma curva (p, q) na fronteira do nó exterior que também gera S^3 ? De maneira um pouco diferente, esta questão foi proposta inicialmente por Tietze em 1908. Apenas em 1989 os matemáticos Cameron Gordon e John Luecke [7] conseguiram demonstrar que há uma única cirurgia de Dehn em um dado nó em S^3 que gera S^3 novamente. Em 1978, Robion Kirby [9] provou que existe um conjunto de operações em uma cirurgia de Dehn tal que se duas cirurgias de Dehn geram uma mesma variedade, então estas duas cirurgias estão relacionadas por uma sequência destas operações, que são conhecidas como *cálculo de Kirby*.

O método de Dehn também foi utilizado pelos matemáticos em tentativas de demonstrar a conjectura de Poincaré. Em 1958, R.H. Bing [4] mostrou que variedades de dimensão três obtidas por cirurgia de Dehn em um nó trifólico (ou curva $(3,2)$) não são contra-exemplo da conjectura. Ao mesmo tempo levantou-se a questão: para quais nós, além do trivial e do trifólico a cirurgia de Dehn não produz contra-exemplos da conjectura? Em 1971 Bing organizou os resultados obtidos até então

definindo a chamada *Propriedade P*. Dado um nó K , se a seguinte propriedade for válida para K , então dizemos que K possui propriedade P : se uma cirurgia de Dehn em K gerar uma variedade simplesmente conexa M , então M é homeomorfa à esfera S^3 . Esta condição implica que nenhum contra-exemplo para a conjectura de Poincaré pode ser produzido através de cirurgia de Dehn em um nó K . Ainda hoje é um problema em aberto, talvez um dos maiores da teoria dos nós, saber se todos os nós possuem propriedade P .

O estudo de estruturas geométricas, ou geometrias, em variedades de dimensão três surgiu por volta do início da década de 80 com os trabalhos de W. Thurston [21]. A conjectura de Thurston é um problema famoso da matemática que propõe uma completa caracterização da estrutura geométrica de variedades de dimensão três. Antes de tentarmos entender a conjectura de Thurston, vamos explorar um pouco o caso bidimensional. Vimos na figura 1 que podemos identificar os lados de um quadrado para obter um toro. Ao mesmo tempo, podemos preencher todo o plano euclidiano com quadrados que se encaixam perfeitamente ao redor de cada vértice, como azulejos que se encaixam perfeitamente nas paredes. Através desta descrição conclue-se que o toro é o espaço quociente do plano pela ação de um grupo de recobrimento composto de isometrias euclidianas. Dessa maneira, pode-se dar ao toro uma estrutura euclidiana, isto é, uma métrica que o torna localmente isométrico ao espaço euclidiano. Com o bitoro o processo é diferente. Podemos identificar os lados de um octógono regular para obter um bitoro. Porém, não é possível preencher o plano euclidiano com octógonos que se encaixam perfeitamente ao redor de cada vértice. Esse preenchimento só é possível no plano hiperbólico. Nesse caso, o bitoro admite estrutura hiperbólica, ou seja, o bitoro possui métrica que o torna localmente isométrico ao plano hiperbólico. Para uma exposição mais detalhada destas idéias, veja [20] ou [2]. O resultado geral é: a esfera admite estrutura elíptica, o toro admite estrutura euclidiana e todas as outras superfícies admitem estrutura hiperbólica.

A conjectura de Thurston é mais geral que a conjectura de Poincaré. Expondo de maneira simplificada, a conjectura de Thurston diz que se uma variedade de dimensão três for decomposta através de um método especial, então os pedaços resultantes de tal decomposição admitem uma das seguintes geometrias: geometria euclidiana, hiperbólica, elíptica, ge-

ometria de $S^2 \times R$, geometria de $H^2 \times R$, geometria de SL_2R , geometria de Nil ou geometria de Sol. W.Thurston obteve a medalha Fields em 1982 pela prova de que a conjectura é válida em alguns casos especiais. Os trabalhos de G.Perelman estão relacionados com a conjectura de Thurston. Apesar destes trabalhos ainda estarem sendo analisados por especialistas enquanto este artigo é escrito, parece ser consenso o fato de que Perelman já contribuiu para um avanço essencial na teoria das variedades de dimensão três.

Referências

- [1] C.C.Adams. *The Knot Book*. W.H.Freeman and Company, New York, 1994.
- [2] E.R. de Andrade. *Alguns Trabalhos do IME-USP para o 10º Simpósio Internacional de Iniciação Científica da USP - 2002*. V.C.Lopes, organizador. Publicações IME-USP, 2003.
- [3] M.A.Armstrong. *Basic Topology*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [4] R.H.Bing. *Some aspects of the Topology of 3-Dimensional Manifolds related to the Poincaré's Conjecture*. Lectures on Modern Mathematics. Vol2, T.L. Saaty,ed. , Wiley, New York, 93-128, 1964.
- [5] M.Dehn e P.Heegaard. *Analysis Situs*. Enzyklopädie Math. Wiss. III. AB 3, Teubner, Leipzig, 153-220, 1907.
- [6] M. Freedman. The Topology of 4-Dimensional Manifolds. *J.Diff.Geo.* 17, 357-453, 1982.
- [7] C.Gordon e J.Luecke. Knots are determined by their complements. *J.Amer. Math. Soc.* 2(2),371-415,1989.
- [8] I.M.James. *History Of Topology*. Elsevier Science B.V., Amsterdam,1999.
- [9] R.Kirby. Problems in low-dimensional manifolds theory. *Algebraic and Geometry Topology, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*. R.J.Milgram, ed., AMS, Providence, RI, 32, 273-312, 1978.

-
- [10] W.B.R. Lickorish. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds. *Ann. of Math.*, 76, 531-540, 1962.
- [11] R. Meyerhoff. Geometric Invariants for 3-Manifolds. *Math. Intel.*, vol.14, 37-53, 1992.
- [12] E.E.Moise. Affine Structures in 3-Manifolds. V.The triangulation theorem and *Hauptvermutung*, *Ann. Math.*,56, 96-114, 1952.
- [13] G.Perelman. *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. E-print math.DG/0211159, 2002.
- [14] G.Perelman. *Ricci flow with surgery on three-manifolds*. E-print math.DG/0303109, 2003.
- [15] H.Poincaré. *Analysis Situs*. J.Ec.Poly. 1,1-121; *Ouvres*, vol. VI, 193-288.
- [16] Radó. *Über den Begriff der Riemannsche Fläche*. Acta Univ. Szegde 2, 101-121, 1924.
- [17] D.Rolfsen. *Knots and Links*. Publish or Perish Press, Berkeley, 1976
- [18] S.Smale. *Generalized Poincarés Conjecture in Dimensions Grater than Four*. Ann. of Math. 74, 391-406, 1961.
- [19] J.Stilwell. *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [20] J.Stilwell. *Geometry of Surfaces*. Springer-Verlag, New York, 1992.
- [21] W.Thurston. *Three-Dimensional Geometry and Topology*. Princeton University Press, New Jersey, 1997.
- [22] H.Tietze. *Über die topologischen Invarianten merhdimensionaler Mannigfaltigkeiten*, Monatshefte fur Mathematik und Physik. 19, 357-381, 1908.
- [23] A.H.Wallace. Modifications and Cobounding Manifolds. *Canad. J. Math.*, 12, 203-552, 1960.

Caixa Postal 60152
CEP 05391-970
elizaramos@hotmail.com