MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº 34 – junho 2003 – pp. 105-107

Resenhas de Livros[1]

Sobre *"Percolation", Grimmett, G., A series of comprehensive Studies in Mathematics Vol. 321, second edition, Springer-Verlag (1999).*

Luis Renato Fontes

Desde que foi introduzido em 1957 por Broadbent e Hammersley, o modelo de percolação tem sido um desafio constante para matemáticos. Foi proposto como modelo para máscaras de gás, em que a rede hipercúbica representa o meio poroso, através dos canais do qual partículas podem ou não passar. Os canais são representados pelos elos da rede. Estes são declarados abertos ou fechados de forma aletória, segundo lances de uma moeda, por exemplo. Para cada elo, é feito um lançamento independente da moeda. Se sair cara, o elo é declarado aberto; se coroa, fechado. Desta forma, feitos todos os lances, um para cada elo, temos a realização de um meio aleatório constituido de elos/canais abertos e fechados. A probabilidade de ocorrer cara num lançamento da moeda, a densidade de elos abertos, é um parâmetro do modelo. O interesse é então em obter propriedades de transporte do modelo em função do parâmetro de densidade. Em particular, queremos conhecer a distribuição de aglomerados abertos, os subconjuntos maximais de sítios ligados entre si por caminhos de elos abertos. Uma primeira questão é a ocorrência de aglomerados infinitos.

Em dimensão 1, o modelo é trivial e é fácil ver que para toda densidade menor do que 1 não há aglomerados infinitos em quase toda realização do meio. Em seu trabalho inaugural, Broadbent e Hammersley mostram

[1]Seção coordenada por Sérgio Volchan

que em duas e mais dimensões, existe uma densidade crítica não trivial, ou estritamente entre 0 e 1, abaixo da qual não há aglomerados infinitos em quase toda realização do meio, e acima da qual há aglomerados infinitos em quase toda realização do meio. O desafio subseqüente está em elucidar a natureza desta transição de fase. De uma forma ou de outra, isto ocupa os pesquisadores desde então.

O livro de Grimmett, em suas duas edições, contém uma compilação de muito do que se fez de matemática neste modelo até fins da década de 1980, na primeira edição, e até fins da década de 1990, na segunda edição. A transição de fase que ocorre em percolação é muito similar à de modelos da mecânica estatística, o que, aliado à simplicidade do modelo de percolação, atraiu o interesse dos físicos, que produziram muito a respeito. O foco de Grimmett é no entanto nos resultados matemáticos. Apenas num capítulo, em que se apresenta a teoria de escala para o modelo na vizinhança do ponto crítico, de forma eminentemente física-teórica, a argumentação não é inteiramente rigorosa, o que se justifica pelo grande interesse no comportamento do modelo na densidade crítica, e pela grande dificuldade matemática de abordagem, além do que tais tipos de argumento muitas vezes sugerem linhas de ataque rigorosas bem sucedidas.

O livro começa com o resultado fundamental de Broadbent e Hammersley e prossegue em caracterizações das fases subcrítica (densidade abaixo da crítica) e supercrítica (densidade acima da crítica). Na primeira, o decaimento exponencial da distribuição do tamanho do aglomerado contendo a origem é estabelecido. Os argumentos independentes de Menshikov e de Aizenman e Barsky são apresentados. Seguem resultados de analiticidade na fase subcrítica de alguns valores esperados do modelo como função da densidade. Na fase supercrítica, destaca-se o resultado de Aizenman-Kesten-Newman sobre a unicidade quase certa do aglomerado infinito, com o argumento de Burton-Keane.

A teoria de dualidade do modelo bidimensional aparece em capítulo próprio, começando com o resultado de Harris-Kesten estabelecendo que a densidade crítica é igual a $\frac{1}{2}$, passando pelos de Russo-Seymour-Welsh, com verificações parciais da teoria de escala neste caso.

Nos capítulos finais, modelos relacionados a percolação são discutidos, entre eles modelos de sítio, percolação orientada, percolação contínua, modelos de crescimento, como percolação de invasão e percolação de primeira passagem. Discute-se ainda brevemente, entre outros, os modelos de contato, redes elétricas aleatórias, e, na segunda edição, percolação fractal e o modelo de aglomerados aleatórios, este relacionado aos modelos de Ising e Potts da mecânica estatística.

Há considerável acréscimo de material na segunda edição, refletindo progressos na teoria desde a primeira edição, com destaque para os resultados de Aizenman-Grimmett sobre monotonicidade estrita da densidade crítica em função de enhancements, e o capítulo sobre renormalização, onde são descritos os resultados de Grimmett-Marstrand sobre a continuidade do ponto crítico da percolação em placas quando a espessura diverge, e de Barsky-Grimmett-Newman sobre a continuidade no ponto crítico para modelos em semiespaços de dimensões acima de 2; a questão continua em aberto no espaço inteiro (em dimensões baixas acima de 2; em dimensões altas ela foi estabelecida por Hara- Slade).

Os desenvolvimentos recentes na teoria de escala no ponto crítico em duas dimensões aparecem brevemente. Descreve-se a proposição por Langlands e Cardy de limites de escala conformemente invariantes. A subseqüente descoberta por Schramm dos processos limite, as Evoluções de Loewner Estocásticas (ou Evoluções de Loewner-Schramm), e a obtenção por Smirnov do limite de escala no modelo de sítios na rede triangular, com a derivação dos expoentes críticos e verificação das relações de escala por Smirnov- Werner naquele modelo, são posteriores à publicação da segunda edição.

A segunda edição, como a primeira, constitui uma ótima introdução e referência para matemáticos, tanto jovens como experientes, em áreas tão diversas quanto probabilidade, física matemática e combinatória (há muitos trabalhos recentes e não tão recentes em teoria de grafos aleatórios relacionados ao modelo de percolação, alguns dos quais mencionados no texto), para ficar nas mais imediatas. O texto é excepcionalmente bem escrito e o assunto imediata e continuamente atraente. A edição é muito bem cuidada, com boa diagramação e muitas figuras ilustrativas, que muito ajudam na compreensão de argumentos geométrico-espaciais, muitas vezes intrincados.

Luis Renato Fontes
Instituto de Matemática e Estatística
USP
Rua do Matão 1010
CEP 05508-090
São Paulo Brasil
lrenato@ime.usp.br