MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº35 – dezembro 2003 – pp. 31–40

Ordem no caos de Devaney

Adalberto Spezamiglio e Weber Flávio Pereira

1 Introdução

Sistemas caóticos têm sido objeto de estudo intensivo nas últimas décadas, por grande número de pesquisadores em todo o mundo, em vários ramos das Ciências Exatas, mesmo sem ter um consenso do significado preciso. De fato, muitos problemas da Física, Engenharia, Economia, entre outras, têm sido referenciados como de comportamento caótico, muitas vezes de uma maneira informal, baseado em alguma propriedade manifestada pelo sistema.

A definição de aplicação caótica dada por Devaney [3] em 1989 tem recebido muita atenção dos interessados no assunto, já que parece captar propriedades básicas daquilo que muitos consideram caótico. Em sua definição, Devaney chama de caótica uma aplicação quando ela satisfaz três propriedades básicas, chamadas brevemente de (1) sensibilidade, (2) transitividade, e (3) densidade dos pontos periódicos. Nos anos que seguiram à definição, a independência dessas condições foi alvo de dedicada atenção e algumas implicações entre elas foram descobertas. Verificou-se, por exemplo, que no caso unidimensional, a transitividade sozinha é equivalente às outras duas, sendo portanto suficiente para definir caoticidade nesse caso.

O objetivo deste trabalho é apresentar, de uma maneira tão didática quanto possível, a partir da definição dada por Devaney, resultados envolvendo implicações entre as três condições, exibindo exemplos para aquelas que não se verificam. No final, a partir dos resultados apresentados, exibiremos uma forma alternativa da definição, aparentemente de formulação mais simples.

2 O caos de Devaney

Sejam X um espaço métrico e $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. Vamos admitir em todo o trabalho que X não é um conjunto finito. Dada uma aplicação contínua $f : X \to X$, consideremos a equação discreta

$$x(n+1) = f(x(n)), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dado $x(0) = x_0 \in X$, a solução do problema (1) com condição inicial x_0 é a seqüência $(f^n(x_0))$ onde f^n é a n-ésima iterada de f. Essa seqüência é chamada *órbita* de x_0 pela f. Um *ponto fixo* de f é um ponto $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) = x_0$. Se existe $n \geq 1$ tal que x_0 é um ponto fixo da iterada f^n, dizemos que x_0 é um *ponto periódico* de f. O menor n nessas condições é chamado *período* da órbita.

Para uma f nas condições acima, diremos que f é *transitiva* se dados arbitrariamente dois subconjuntos abertos U e V de X, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Por exemplo, se X não tem pontos isolados e se f possui uma órbita densa em X, então f é transitiva. No caso em que X é compacto sem pontos isolados, a existência de uma órbita densa é na verdade equivalente à transitividade. Diremos ainda que f tem *sensibilidade em relação às condições iniciais* se existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in X$ e qualquer vizinhança W de x, existem $y \in W$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que $d(f^k(x), f^k(y)) > \delta$, onde d é a distância em X. Ou seja, perturbações arbitrariamente pequenas podem resultar em erros grandes depois de algumas iterações. Temos condições agora de apresentar a definição de aplicação caótica dada por Devaney.

Definição 2.1: Uma aplicação contínua $f : X \to X$ é dita *caótica* se

1. f tem sensibilidade em relação às condições iniciais.
2. f é transitiva.
3. Os pontos periódicos de f são densos em X.

Uma questão básica que se coloca é se a caoticidade é uma propriedade topológica, isto é, se $f : X \to X$ é uma aplicação caótica, se $h : X \to Y$ é um homeomorfismo e se $g : Y \to Y$ é tal que $h^{-1} \circ g = f \circ h^{-1}$, então g é caótica? Vejamos que as propriedades (2) e (3) são topológicas, mas a (1) nem sempre. De fato, se D é o conjunto dos pontos periódicos de f denso em X, como h é contínua e sobrejetiva, é fácil ver que $h(D)$ é denso em Y e é o conjunto dos pontos periódicos de g, e assim (3) é uma propriedade topológica. Sejam agora U e V abertos não vazios de Y. Então $h^{-1}(U)$ e $h^{-1}(V)$ são abertos não vazios de X. Pela transitividade de f, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(h^{-1}(U)) \cap h^{-1}(V) \neq \emptyset$. Desde que $h^{-1} \circ g^k = f^k \circ h^{-1}$ para todo k, segue que $h^{-1}(g^k(U)) \cap h^{-1}(V) = h^{-1}(g^k(U) \cap V) \neq \emptyset$, ou seja, g é transitiva.

No entanto, a sensibilidade em relação às condições iniciais não é propriedade topológica. Tomemos $X = (1, \infty)$ com a métrica usual da reta e $f : X \to X$, $f(x) = 2x$. Temos que f satisfaz a condição (1) da definição anterior, pois $|f^k(x) - f^k(y)| = 2^k|x - y|$, para quaisquer $x, y \in X$ e $k \in \mathbb{N}$. Consideremos agora $Y = (0, \infty)$ e $h(x) = \log x$. Temos que h é um homeomorfismo e a função $g : Y \to Y$ correspondente será $g(x) = x + c$ onde $c = \log 2$. Tal função é contínua e não tem a sensibilidade em relação às condições iniciais, pois $|g^k(x) - g^k(y)| = |x - y|$ para quaisquer $x, y \in Y$ e $k \in \mathbb{N}$. Pode-se mostrar (veja [2]) que no caso em que X é compacto, a propriedade (1) da definição é uma propriedade topológica.

3 Primeira simplificação

O resultado seguinte apresentado em [2] garante que a caoticidade é uma propriedade topológica.

Teorema 3.1 *Se uma aplicação contínua $f : X \to X$ é transitiva e os pontos periódicos de f são densos em X, então f tem sensibilidade em relação às condições iniciais.*

Prova: Vamos mostrar inicialmente o seguinte fato: existe $\delta_0 > 0$ tal que, para todo $x \in X$, existe um ponto periódico $q \in X$ cuja órbita está a uma distância de x maior ou igual a $\delta_0/2$. Com efeito, consideremos dois pontos periódicos q_1 e q_2 de f com órbitas disjuntas. Seja $\delta_0 > 0$ a distância entre essas duas órbitas. Se existisse $x \in X$ tal que a distância de x a qualquer órbita periódica de f fosse menor que $\delta_0/2$, em particular isso aconteceria com as órbitas de q_1 e q_2. Se as distâncias de x a essas duas órbitas são obtidas respectivamente nos pontos $f^n(q_1)$ e $f^m(q_2)$, então teríamos

$$\delta_0 \leq d(f^n(q_1), f^m(q_2)) \leq d(f^n(q_1), x) + d(x, f^m(q_2)) <$$
$$< \frac{\delta_0}{2} + \frac{\delta_0}{2} = \delta_0,$$

uma contradição, ficando desta forma provado o fato acima.

Vamos mostrar agora que f tem sensibilidade em relação às condições iniciais, com constante $\delta := \delta_0/8$. Seja $x \in X$ arbitrário e seja W uma vizinhança qualquer de x. Se $U = W \cap B(x;\delta)$ onde $B(x;\delta)$ é a bola aberta de centro x e raio δ, segue que existe um ponto periódico $p \in U$, digamos de período n. Pelo fato provado acima, para esse ponto x tomado, existe um ponto periódico $q \in X$ cuja órbita está a uma distância de x maior ou igual a 4δ. Seja

$$V = \bigcap_{i=0}^{n} f^{-i}(B(f^i(q), \delta)).$$

Temos que V é aberto e contém q. Pela transitividade de f, existem $y \in U$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(y) \in V$. Seja j a parte inteira de $k/n + 1$, isto é, $\frac{k}{n} + 1 = j + c$, com $c \in [0, 1)$. Então, $k + n = nj + nc$, que implica $0 < nj - k \leq n$, e portanto $1 \leq nj - k \leq n$. Disso concluímos que $f^{nj}(y) = f^{nj-k}(f^k(y)) \in f^{nj-k}(V)$, pois $f^k(y) \in V$. Agora,

$$f^{nj-k}(V) \subset \bigcap_{i=0}^{n} f^{nj-k}(f^{-i}(B(f^i(q), \delta))) =$$

$$f^{nj-k}(f^{-(nj-k)}(B(f^{nj-k}(q), \delta)) \cap \Big(\bigcap_{\substack{i=0 \\ i \neq nj-k}}^{n} f^{nj-k}(f^{-i}(B(f^i(q), \delta)))\Big)$$

e esta última expressão está obviamente contida em $B(f^{nj-k}(q), \delta)$. Portanto $f^{nj}(y) \in B(f^{nj-k}(q), \delta)$. Como p tem período n, temos que $f^{nj}(p) = p$. Usando a desigualdade triangular,

$$d(x, f^{nj-k}(q)) \leq d(x, p) + d(p, f^{nj}(y)) + d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)),$$

de onde tiramos

$$d(f^{nj}(y), f^{nj}(p)) = d(f^{nj}(y), p) \geq d(x, f^{nj-k}(q)) - d(x, p) -$$

$$-d(f^{nj}(y), f^{nj-k}(q)) > 4\delta - \delta - \delta = 2\delta.$$

Assim,

$$2\delta < d(f^{nj}(p), f^{nj}(y)) \leq d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) + d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)).$$

Temos portanto que $d(f^{nj}(p), f^{nj}(x)) > \delta$ ou $d(f^{nj}(x), f^{nj}(y)) > \delta$, e isso mostra a sensibilidade em relação às condições iniciais.

Vemos em [1] que o resultado anterior é a única situação possível, isto é, quaisquer outras duas condições não implicam a terceira, de acordo com os exemplos seguintes.

Exemplo 3.1: Em $S^1 = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ com a métrica $d(e^{i\theta}, e^{i\phi}) = \text{mín}\{|\theta - \phi - 2\pi|, |\theta - \phi|, |\theta - \phi + 2\pi|\}$, seja

$$X = S^1 - \{e^{i2\pi p/q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

com a métrica induzida. Vemos que as raízes n-ésimas da unidade não estão em X, para qualquer $n \geq 1$. Seja $f : X \to X$ dada por $f(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$. Não é difícil ver que f é transitiva. De fato, cada iterada de f consiste em duplicar o argumento da iterada anterior. Portanto, se U e V são abertos em X, existe um inteiro k tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Agora, observemos que se $x = e^{i\theta} \in X$ e se W é uma vizinhança de x, podemos tomar $y = e^{i\phi} \in W$ com $\theta \neq \phi$ de modo que, para todo n, $d(f^n(x), f^n(y)) = 2^n|\theta - \phi|$. Se x e y são tomados de forma que $0 < |\theta - \phi| < \pi$ e n de forma que $2^n|\theta - \phi| \leq \pi < 2^{n+1}|\theta - \phi|$ então $d(f^n(x), f^n(y)) > \pi/2$, e assim f tem sensibilidade em relação às condições iniciais. No entanto, f não possui pontos periódicos em X. De fato, se $e^{i\theta}$ fosse um ponto de período n para f, teríamos $e^{i\theta} = e^{i2^n\theta}$, que implicaria

$$\cos\theta = \cos(2^n\theta), \qquad \text{sen}\theta = \text{sen}(2^n\theta).$$

A única solução das equações acima é $2^n\theta = \theta + 2k\pi$, onde k é um inteiro, $0 \leq k \leq 2^n - 1$. Daí teríamos que os pontos periódicos de f seriam raízes $(2^n - 1)$-ésimas da unidade, mas estas não pertencem a X, como já observamos.

O mesmo fenômeno pode ocorrer com X compacto: seja X o conjunto dos números em $[0, 1)$ que têm na expansão decimal apenas os dígitos 0 e 1, isto é, $x = 0, s_1 s_2 s_3 ...$ onde $s_j \in \{0, 1\}$, para todo inteiro $j \geq 1$. X é homeomorfo ao conjunto de Cantor usual, portanto compacto. Consideremos $f : X \to X$ definida assim: se $x = 0, 111... = 1/9$, $f(x) = 0$. Se $x = 0, s_1 s_2 s_3 ... \neq 1/9$, tomamos $k \geq 1$ o maior inteiro tal que $s_j = 1$ para todo $j < k$ e definimos $f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t_j}{10^j}$ onde $t_j = 0$ para $j < k$, $t_k = 1$ e $t_j = s_j$ para $j > k$. O leitor deve se convencer que f não tem pontos periódicos, é transitiva (todas as órbitas são densas) e apresenta sensibilidade em relação às condições iniciais.

Exemplo 3.2: Veremos neste exemplo uma função contínua cujos pontos periódicos são densos, com sensibilidade em relação às condições iniciais, mas que não é transitiva. Seja $X = S^1 \times [0, 1]$ com a métrica $d((e^{i\theta_1}, t_1), (e^{i\theta_2}, t_2)) = |t_1 - t_2| + \text{mín}\{|\theta_1 - \theta_2 - 2\pi|, |\theta_1 - \theta_2|, |\theta_1 - \theta_2 + 2\pi|\}$. Seja $f : X \to X$ dada por $f(e^{i\theta}, t) = (e^{i2\theta}, t)$. Temos que f não é transitiva. De fato, sejam $U = S^1 \times [0, \frac{1}{2})$ e $V = S^1 \times (\frac{1}{2}, 1]$. U e V são abertos (em X), $U \cap V = \emptyset$, e $f^n(U) = U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, para todo n, $f^n(U) \cap V = \emptyset$ e f não é transitiva. Por outro lado, pela analogia ao exemplo anterior, um ponto $(e^{i\theta}, t)$ será um ponto periódico de f de período n se $e^{i\theta}$ for uma raiz $(2^n - 1)$-ésima da unidade, e o conjunto de todas as raízes n-ésimas da unidade, para $n \geq 1$, é denso em S^1, de onde se conclui que os pontos periódicos de f são densos em X. Finalmente, para mostrar a sensibilidade, se $x = (e^{i\theta}, t) \in X$, tomemos $y = (e^{i\phi}, s) \in W$, W uma vizinhança de x de modo que $d(f^n(x), f^n(y)) = 2^n|\theta - \phi| + |t - s|$. Tomando $\delta = \pi/2$, segue que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que essa distância fica maior que δ.

4 Aplicações caóticas na reta

No importante caso em que X é um intervalo $J \subset \mathbb{R}$, temos mais uma simplificação apresentada em [5], segundo a qual a transitividade é suficiente para que f seja caótica.

Teorema 4.1 *Se uma aplicação contínua $f : J \to J$ é transitiva então os pontos periódicos de f são densos em J.*

Para apresentar uma prova desse resultado vamos necessitar do seguinte

Lema 4.2 *Seja $f : J \to J$ contínua. Se $I \subset J$ é um intervalo que não contém ponto periódico de f e se z, $f^m(z)$ e $f^n(z)$ estão em I onde $0 < m < n$, então $z < f^m(z) < f^n(z)$ ou $z > f^m(z) > f^n(z)$.*

Prova: Vamos supor que exista $z \in I$ com $z < f^m(z)$ e $f^m(z) > f^n(z)$. Seja $g : J \to J$ dada por $g(x) = f^m(x)$. Como $z < g(z)$ temos que

$$z < g(z) < g^{k+1}(z), \qquad \forall k \geq 1. \tag{2}$$

De fato, se existisse um inteiro positivo r tal que $z < g^r(z)$ e $g(z) > g^{r+1}(z)$, considerando a função $h(x) = g^r(x) - x$ teríamos $h(z) > 0$ e $h(g(z)) < 0$. Pelo Teorema do Valor Intermediário, existiria $c \in (z, g(z)) \subset I$ tal que $h(c) = 0$, ou seja, c seria um ponto periódico para f em I, uma contradição. Assim, a expressão (2) é verdadeira.

Tomando $k = n - m - 1$ em (2), temos

$$z < f^{(n-m)m}(z). \tag{3}$$

Como estamos supondo $f^m(z) > f^n(z)$, temos

$$f^m(z) > f^{(n-m)}(f^m(z)) = f^n(z).$$

Afirmamos que

$$f^{(n-m)m}(f^m(z)) < f^m(z). \tag{4}$$

Para mostrar isso, seja $G(x) = f^{(n-m)}(x)$. De modo análogo à prova da desigualdade (2) acima, mostra-se que

$$f^m(z) > G(f^m(z)) > G^{k+1}(f^m(z)), \qquad \forall k \geq 1.$$

Tomando $k + 1 = m$ obtém-se então $f^m(z) > G^m(f^m(z))$, ou seja, (4) é verdadeira. Finalmente, considerando a função $H(x) = f^{(n-m)m}(x) - x$, das desigualdades (3) e (4) e o Teorema do Valor Intermediário, existe $C \in (z, f^m(z)) \subset I$ tal que $H(C) = f^{(n-m)m}(C) = 0$, e C é um ponto periódico de f em I, uma contradição.

A análise do caso $z > f^m(z)$ e $f^m(z) < f^n(z)$ é análoga, com adaptações naturais. O lema fica assim demonstrado.

Prova do Teorema 4.1: Vamos supor que o conjunto dos pontos periódicos de f não seja denso em J. Então existe um intervalo I, $I \subset J$, tal que I não contém ponto periódico de f. Tomemos x no interior de I, uma vizinhança U de x com $U \subset I$, $U \neq I$ e V um intervalo aberto com $V \subset I - U$. Como f é transitiva, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Daí, existe $y \in U$ tal que $f^m(y) \in V$, ou seja $y \neq f^m(y)$. Da continuidade de f^m, existe um intervalo aberto W contendo y, $W \subset U$ tal que $f^m(W) \cap W = \emptyset$. Como o intervalo $f^m(W) \cap V$ é não vazio, tomemos um aberto não vazio $A \subset f^m(W) \cap V$. Aplicando agora a transitividade de f usando os abertos W e A, temos que existem $k > 0$ e $u \in A$ tais que $f^k(u) \in W$. Como $u \in A$, tem-se $u = f^m(z)$ para algum $z \in W \subset I$. Assim, $f^k(u) = f^k(f^m(z)) = f^{k+m}(z) \in W$. Ponto $n = k + m > m$, temos $0 < m < n$, com z, $f^n(z) \in W$ e $f^m(z) \notin W$, contrariando o Lema 4.2. Assim, o teorema fica demonstrado.

O exemplo seguinte mostra que nenhuma outra das condições sozinha implica em caoticidade em um intervalo.

Exemplo 4.1: A sensibilidade em relação às condições iniciais (ou a densidade dos pontos periódicos) não implica em transitividade. Seja f definida em $[0, \infty)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \leq x < 1/3; \\ -3x + 2, & 1/3lex < 2/3; \\ 3x - 2, & 2/3 \leq x < 1; \\ f(x-1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Pode-se ver sem grande dificuldade que f satisfaz as seguintes propriedades: (i) $|f'(x)| = 3$ para todo $x \in [0, \infty)$, exceto nos pontos da forma $m \pm 1/3$ com $m \in \mathbb{N}$, onde as derivadas laterais tem essa propriedade; (ii) Todo inteiro não negativo é ponto fixo de f^n, e f^n tem $3^n - 2$ pontos fixos entre dois inteiros consecutivos quaisquer, com distâncias entre esses pontos fixos menores que $(1/3)^{n-1}$; (iii) Para quaisquer $k, n \in \mathbb{N}$, $f^k([n, n+1]) = [n, n+1]$. Dessas propriedades tiramos respectivamente as seguintes conclusões: (i') f tem sensibilidade em relação às condições iniciais, já que qualquer pequeno intervalo se expandirá pelas iterações; (ii') os pontos periódicos de f são densos em $[0, \infty)$; (iii') f não é transitiva, pois se tomarmos um aberto $U \subset [n, n+1]$ e $V \subset [n+1, n+2]$, não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.

5 O caos de Devaney em ordem

Baseado nos resultados anteriores, consideramos a seguinte condição sobre uma aplicação $f : X \to X$ contínua num espaço métrico X, que vamos chamar provisoriamente de *condição (C)*, apresentada em [4]:

Condição (C): Dados abertos não vazios U e V de X, existe um ponto periódico $p \in U$ de f e existe um inteiro não negativo k tal que $f^k(p) \in V$.

Em outras palavras, se f satisfaz a condição (C), qualquer par de subconjuntos abertos não vazios de X compartilha uma órbita periódica. O objetivo desta seção é mostrar que $f : X \to X$ é caótica se e somente se f satisfaz a condição (C), e desta forma temos uma formulação equivalente à dada na Definição 2.1, porém mais simples. Em [4] pode-se ver também que, na verdade, f é caótica se e somente se qualquer coleção finita de abertos não vazios de X compartilha infinitas órbitas periódicas.

Supondo inicialmente que f satisfaz a condição (C), segue imediatamente que os pontos periódicos de f são densos em X, e que f é transitiva. Quanto à recíproca, vamos supor que f seja caótica em X. Dados abertos não vazios U e V em X, segue da transitividade que existem $u \in U$ e $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(u) \in V$. Seja $W = f^{-k}(V) \cap U$. Temos que W é aberto e não vazio pois $u \in W$. Além disso,

$$f^k(W) = f^k(f^{-k}(V) \cap U) \subset V \cap f^k(U) \subset V.$$

Da densidade dos pontos periódicos, segue que existe um ponto periódico $p \in W$. Logo $p \in U$ e $f^k(p) \in f^k(W) \subset V$, provando a condição (C). Temos assim a seguinte

Definição 5.1: Se X é um espaço métrico e $f : X \to X$ é uma aplicação contínua, dizemos que f é caótica se dados abertos não vazios U e V de X, existe um ponto periódico $p \in U$ de f e existe um inteiro não negativo k tal que $f^k(p) \in V$.

Agradecimento. Os autores agradecem ao revisor pelas contribuições e sugestões que melhoraram a apresentação do trabalho.

Referências

[1] Assaf, D.; Gadbois, S. Definition of chaos. Letters in *The American Malthematichal Monthly*, v.99, n.9, p.865, 1992.

[2] Banks, J.; Cairns, G.; Davis, G.; Stacey, P. On Devaney's definition of chaos. *The American Mathematical Monthly*, v.99, n.4, p.332-334, 1992.

[3] Devaney, R.L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. Redwood City: Addison-Wesley, 1989. 336p.

[4] Touhey, P. Yet another definition of chaos. *The American Mathematical Monthly*, v.104, n.5, p.411-414, 1997.

[5] Vellekoop, M.; Berglund, R. On intervals, transitivity = chaos. *The American Mathematical Monthly*, v.101, n.4, p.353-355, 1994.

Departamento de Matemática, IBILCE/UNESP
15054-000, *São José do Rio Preto, SP*
E-mail: adalbert@mat.ibilce.unesp.br