MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA
nº35 – dezembro 2003 – pp. 41–46

Problemas propostos na I Bienal da SBM

Os problemas constantes dessa nota se referem a um quadro de problemas que era atualizado diariamente quando da realização da Bienal da SBM, pelo qual foram responsaveis Carlos Gustavo Moreira - IMPA - Rio de Janeiro e Nicolau Corção Saldanha - PUC - Rio de Janeiro. Esse quadro fazia parte de uma atividade mais ampla, que envolvia palestras sobre problemas e resultados interessantes de matemática para alunos de graduação e do ensino médio, que foi coordenada pelos dois citados acima e por Carlos Tomei - PUC - Rio de Janeiro.

1 Problemas propostos pelos coordenadores da Sessão de Problemas

1. Dois matemáticos, perdidos em Berlin, chegam à esquina da Rua Barbarossa com a rua Martin Luther, e precisam chegar à esquina da rua Meininger com a Rua Martin Luther. Infelizmente eles não sabem para que lado fica a rua Meininger, nem a que distância ela está, logo são obrigados a ir e voltar ao longo da rua Martin Luther até chegarem à esquina desejada. Eles andam sempre juntos.

Qual é o menor valor para o número positivo k tal que eles podem ter certeza de que se há n quarteirões entre as ruas Barbarossa e Meininger então eles conseguem chegar ao destino andando no máximo kn quarteirões?

2. Seja α a maior raiz real de $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$. Prove que $\lfloor\alpha^{2004}\rfloor$ é múltiplo de 17, onde $\lfloor\alpha^{2004}\rfloor$ é o menor inteiro tal que

$$\lfloor\alpha^{2004}\rfloor \leq \alpha^{2004} < \lfloor\alpha^{2004}\rfloor$$

3. Suponha que temos $k \geq 3$ moedas, todas iguais exceto por uma que tem peso ligeiramente diferente das demais (não se sabe se maior ou menor) e uma balança de dois pratos.

a. Mostre que se $n \geq 2$ e

$$k \leq \frac{3^n - 3}{2}$$

então é possível determinar com n pesagens qual é a moeda diferente e se ela é mais leve ou mais pesada que as outras.

b. Mostre que se

$$k = \frac{3^n - 1}{2}$$

então é possível deteminar com n pesagens qual é a moeda diferente mas nem sempre é possível dizer se ela é mais leve ou mais pesada que as outras.

4. Em uma Olimpíada Internacional de Matemática cada estudante deve resolver 6 problemas e em cada problema recebe uma nota inteira entre 0 e 7. Dizemos que dois estudantes A e B tiveram desempenhos incomparáveis se existir um problema onde A teve nota mais alta que B e outro problema onde B teve nota mais alta que A.

Encontre o maior inteiro n para o qual é possível que n estudantes tenham desempenhos incomparáveis dois a dois.

5. Sejam $a > 0$ e $P_1P_2P_3P_4P_5$ uma poligonal aberta em um plano α contida entre a reta $\overline{P_1P_5}$ e a paralela a $\overline{P_1P_5}$ passando por P_3. Prove que existem pontos $P_6, P_7 \in \alpha$ tais que $|P_5P_6| = a$ e é possível ladrilhar α com infinitas cópias congruentes do heptágono $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$.

6. a. Mostre que existem dois conjuntos infinitos A, B de inteiros não negativos, não necessariamente disjuntos,t ais que cada inteiro não negativo pode ser representado de uma única maneira como $a + b$, com $a \in A$ e $b \in B$.

b. Prove que, em cada tal par (A, B), ou A ou B contém apenas múltiplos de algum inteiro $k \geq 1$.

7. a. Prove que para todo inteiro positivo n existem n pontos no plano, sem que hajam três colineares, tais que a distância entre dois quaisquer é sempre um inteiro.

b. Existe algum subconjunto infinito do plano, não contido em uma reta, tal que a distância entre dois quaisquer de seus pontos seja sempre inteira?

8. Prove que toda seqüência de números reais com n^2+1 termos admite uma subseqüência monótona (isto é, crescente ou decrescente) com pelo menos $n+1$ termos.

9. a. Prove que existe uma seqüência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números inteiros com $a_0 = 6$, $0 \leq a_j \leq 9$ para todo j tal que os últimos dígitos de x_n^2 coincidem com a representação decimal de x_n, onde

$$x_n = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot 10^j = (a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10}.$$

b.Prove que existe uma única seqüência (a_n) como no item **a.** e que esta seqüência não é periódica.

10. Seja

$$a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{\ldots + \sqrt{n}}}}$$

Decida se existe M tal que $a_n < M$ para todo n.

11. Sejam $a, b \geq 2$ inteiros tais que $a^n - 1$ divide $b^n - 1$ para todo inteiro positivo n. Prove que $b = a^k$ para algum inteiro positivo k.

12. Sejam $\mathbb{N}^*$ o conjunto dos inteiros positivos e $\lfloor x \rfloor$, para $x \in \mathbb{R}$, o único inteiro tal que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor$. Sejam $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $A = \{\lfloor n\alpha \rfloor : n \in \mathbb{N}^*\}$ e $B = \{\lfloor n\alpha^2 \rfloor : n \in \mathbb{N}^*\}$. Prove que $A \cup B = \mathbb{N}^*$ e $A \cap B = \emptyset$.

13. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função tal que se $p, q \in \mathbb{R}^2$ são tais que $d(p,q) = 1$ então $d(f(p), f(q)) = 1$, onde $d(p,q)$ designa a distância euclidiana usual entre p e q. Mostre que $d(f(p), f(q)) = d(p,q)$ para quaisquer $p, q \in \mathbb{R}^2$.

14. Considere um torneio de xadrez envolvendo brasileiros e argentinos em que cada jogador joga contra um dos outros exatamente uma vez. Vitórias valem 1 ponto, empates $\frac{1}{2}$ e derrotas 0. Ao final do torneio, cada jogador obteve metade de seus pontos jogando contra brasileiros e a outra metade jogando contra argentinos.

Prove que o número total de jogadores do torneio é um quadrado perfeito.

15. Sejam $P_1 P_2 \dots P_n$ um polígono inscritível contido em um plano α e $Q \notin \alpha$ um ponto do espaço. Para $1 \leq i \leq n$ seja β_i o plano perpendicular a qP_I passando por P_i.

Prove que os planos β_i se intersectam em um ponto.

16. Um poliedro convexo é um *dado* se valem as seguintes condições:

(i) as faces são indistinguíveis, isto é, dadas duas faces p e q quaisquer existe uma rotação do poliedro que leva p em q e leva o poliedro em si mesmo.

(ii) toda face á paralela a alguma outra face.

Determine para quais valores de n existe um dado com n faces.

17. Existe alguma função polinomial $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que sua imagem $\{p(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ seja o intervalo aberto $(0, +\infty)$?

2 Problemas propostos por participantes da Bienal

1. (Elaborado por Luana Reis e Gabriel, do COLTEC-UFMG) Quatro homens de estados diferentes vivem em casas de cores diferentes dispostas linearmente; nestas casas vivem também quatro animais diferentes, um por casa.

Através das dicas abaixo, diga qual a ordem das casas e seus respectivos ocupantes animais e humanos, com o estado de origem destes últimos.

1. Manoel vive na casa branca.

2. O carioca mora ao lado da casa amarela.

3. Felipe é vizinho do cachorro.

4. Felipe é vizinho da casa preta.

5. O carioca é vizinho de quem tem um peixe.

6. Pedro é vizinho de Manoel.

7. O gaúcho é vizinho do cachorro.
8. O paulista é vizinho do gato.
9. A casa preta tem apenas um vizinho.
10. O peixe não é vizinho do gato.
11. O gato não é vizinho do cachorro.
12. João mora na casa vermelha.
13. O cachorro mora ao lado da casa vermelha.
14. Entre os animais há um coelho.

2. O valor de um tabuleiro de xadrez foi estabelecido do seguinte modo: 1 centavo para a primeira casa, $1+2$ para a segunda, $1+2+3$ para a terceira e assim sucessivamente até a 64ª casa. Qual o valor em reais do tabuleiro? **3.** Existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ que seja C^∞ mas não seja analítica em nenhum ponto?

4. Existe $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $(f\circ f)(x)=e^x$?

5. (Proposto por Bruno (brunofcoutinho@yahoo.com.br)) Notamos que

$$\begin{aligned}
3! &= 2n, \text{ para } n=3\\
5! &= 2n(3n-3), \text{ para } n=5\\
7! &= 2n(3n-3)(4n-8), \text{ para } n=7\\
9! &= 2n(3n-3)(4n-8)(5n-15), \text{ para } n=9\\
11! &= 2n(3n-3)(4n-8)(5n-15)(6n-24), \text{ para } n=9
\end{aligned}$$

Pede-se para generalizar para n ímpar qualquer e entrar em contato com o Bruno sobre a resposta.

6. (Proposto por Iracema (irarezende@yahoo.com.br))Um burrinho está amarrado a uma corda presa à cerca de um pasto circular; o comprimento da corda é igual ao raio do círculo. De quanto se deve aumentar a corda para que o burrinho consiga comer exatamente a metade da área do pasto?

7. (Proposto por Armando G. M. Neves (aneves@mat.ufmg.br)) Se $\tau(k)$ denota o número de divisores de k, mostre que $\tau((n+1)!) \leq 2\tau(n!)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Existem $x, y, z, w \in \mathbb{N}$ tais que $(w+3)^{x+3} + (w+3)^{y+3} = (w+3)^{z+3}$?

9. Sobre $x, y \in \mathbb{Z}$ sabe-se que $\text{mmc}(x, y) = 84$ e $\text{mdc}(x, y) = 3$. Quem são x e y?

10. Explique porquê os resultados da multiplicação de $a = 142587$ por 2, 3, 4, 5 ou 6 são números com os mesmos dígitos de a.

11. Ache uma fórmula algébrica fechada para $a + a^n + a^{n^2} + \ldots + a^{n^m}$.

12. (na mesma caligrafia do problema anterior) Demonstre geometricamente o último teorema de Fermat.