

## Resenha de Livros<sup>1</sup>

Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems, *Anatole Katok and Boris Hasselblatt*, with a supplement by A. Katok and Leonardo Mendoza, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications* 54, Cambridge University Press <sup>2</sup>

Roberto Markarian

A teoria dos sistemas dinâmicos é o ramo da matemática que estuda os movimentos, i.e., os fenômenos que evoluem no tempo. Neste sentido, seus primórdios remontam a Galileu e Newton. Mais precisamente, os “dinamicistas” estão interessados na evolução a longo prazo de diversos sistemas, isto é, o chamado “comportamento assintótico”. Particularmente, investiga-se os aspectos qualitativos, tanto geométricos quanto probabilísticos, destas evoluções.

Os autores do livro resenhado, em seu prefácio, valorizam a disciplina afirmando ela que está “intimamente entrelaçada com a maioria das principais áreas da matemática. Seu núcleo matemático é o estudo da estrutura global das órbitas de transformações e fluxos, com ênfase nas propriedades invariantes sob mudanças de coordenadas. Seus conceitos, métodos e paradigmas estimulam grandemente a pesquisa em muitas ciências, originando a nova e vasta área da dinâmica aplicada (também chamada de ciência não-linear ou teoria do caos).”

---

<sup>1</sup>Seção coordenada por Sérgio Volchan

<sup>2</sup>A edição de capa mole (1997) contém muitas correções em relação com a edição original (1995).

O livro trata especialmente dos sistemas que evoluem em estruturas diferenciáveis e onde o comportamento das derivadas da transformação ou do fluxo jogam um papel fundamental. Estes são os sistemas dinâmicos diferenciáveis (suaves, "smooth") cujo estudo é inseparável do caso dos sistemas que evoluem em espaços topológicos, especialmente aqueles que possuem uma métrica (dinâmica topológica) ou uma medida (dinâmica ergódica), ou em outras estruturas.

David Ruelle, em uma resenha deste livro, diz:

[...] é claro que uma boa introdução avançada à dinâmica diferenciável é ao mesmo tempo muito desejável e não muito fácil de se fazer. A quantidade de material requer uma prolongada exposição, e sua diversidade impõe escolhas. O leitor deve, ademais, ser capaz de obter informações sobre tópicos específicos sem ler e recordar o conjunto do texto. O livro sob resenha satisfaz bastante bem as demandas que acabamos de delinear. De fato, é o único em dar uma exposição detalhada de grande parte da dinâmica de uma forma consistente. O êxito se deve a combinação de talentos dos autores: a clareza de pensamento e a memória enciclopédica de Anatole Katok, e o sentido escrupuloso do detalhe de Boris Hasselblatt. Seu texto não substituirá as diversas e excelentes monografias existentes sobre os vários aspectos da dinâmica diferenciável mas, até este momento, não tem rival como uma introdução de grande amplitude em um nível avançado.<sup>3</sup>

A maioria dos textos sobre sistemas dinâmicos<sup>4</sup> trata de algum tipo especial de sistemas ou de algum enfoque (ou método) particular

<sup>3</sup>David Ruelle, *Ergdo. Th & Dynam. Sys.*, 17 (1997), 1001-1003.

<sup>4</sup>Os leitores latino-americanos conhecem os livros de Jacob Palis e Wellington de Melo (Introdução aos Sistemas Dinâmicos, editado há mais de vinte anos), e Ricardo Mañé (Introdução a Teoria Ergódica que, apesar de sua antiguidade e múltiplos defeitos continua sendo uma excelente referência). Tratando de abarcar todos os temas, mas sem demonstrações, são os volumes da *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, elaborado pelos melhores matemáticos da escola soviética em torno de 1985. Mais moderno é o livro de Clark Robinson: *Dynamical Systems. Stability, symbolic dynamics and chaos*, second ed., corrected and enlarged, CRC Press (1999). É impossível em uma resenha deste tipo querer dar uma panorama sobre o que há publicado sobre o tema.

como, por exemplo, transformações do intervalo, fluxos geodésicos, bilhares, formalismo termodinâmico da mecânica estatística em equilíbrio, dinâmica simbólica, teoria ergódica e teoria das bifurcações. O livro que comentamos é uma introdução aos sistemas dinâmicos diferenciáveis e a uma grande quantidade de temas relacionados, incluindo quase todos aqueles acima mencionados.

Às suas mais de seiscentas páginas de texto adicionam-se um Suplemento de quarenta páginas sobre o que habitualmente se chama teoria de Pesin (redigido anteriormente pelo primeiro autor e Leonardo Mendoza) e outras cinqüenta páginas de um Apêndice com pré-requisitos apresentados com grande amplitude e qualidade. As Notas incluídas no final do livro com base em chamadas no texto principal, fornecem diversos enfoques históricos ou de complemento conceitual aos temas tratados. São também oferecidas sugestões para muitos dos exercícios que aparecem em grande quantidade (mais de quatrocentos) no final de cada capítulo; estes exercícios vão desde os praticamente imediatos e que complementam a boa compreensão do texto, até a extensão de resultados muito importantes, passando pela finalização ou realização de provas de alguns teoremas do corpo principal.

O texto principal do livro consta de quatro partes: 1. Exemplos e conceitos fundamentais; 2. Análise local e crescimento de órbitas; 3. Fenômenos em baixas dimensões e 4. Sistemas dinâmicos hiperbólicos.

O conteúdo do livro é tão vasto que os próprios autores dizem que cada uma das quatro partes pode servir de base para cursos de pós-graduação, posteriores a um primeiro ano em que se tenha estudado análise, geometria e topologia. O material, normalmente é visto em cursos posteriores, sobre funções de várias variáveis, álgebra linear ou equações diferenciais ordinárias, é desenvolvido no Apêndice.

Alguns capítulos têm interessantes introduções em que se fornece um panorama geral do que será abordado em seguida. Neste sentido, destacam-se particularmente os textos iniciais dos capítulos 6 (teoria hiperbólica local e suas aplicações), 9 (aspectos variacionais), 10 (motivação para a dinâmica em baixas dimensões) e 17 (panorama de exemplos de dinâmicas hiperbólicas). Nesta mesma linha inclui-se o Capítulo 0, que é uma excelente introdução não rigorosa a linguagem, os principais ramos da disciplina, as relações entre fluxos e mapeamentos e a importância da linearização para o estudo local. Como amostra do

estilo simples mas profundo destas partes introdutórias, transcrevemos da página 11: “[...] trataremos de localizar certas partes do espaço de fase que jogam um papel particularmente importante no comportamento assintótico e estudar as órbitas dentro e em torno destas partes. É também possível que o comportamento das órbitas com certas condições iniciais seja particularmente importante devido a natureza do problema científico que é representado por este sistema dinâmico.”

Uma manifestação do estado, ainda em elaboração e não planejado, da teoria <sup>5</sup> é a quantidade de espaço dedicado aos exemplos (em particular os Capítulos 1, 5 e 17). Esta é uma grande virtude dado que as idéias e métodos fundamentais aparecem explicitados em casos particulares de diversas procedências.

Este não é um livro para principiantes nem um livro-texto no sentido habitual da palavra. É mais um livro para matemáticos formados e interessados em conhecer aspectos avançados da disciplina, ou um livro de consulta. Ainda assim não é nem pretende ser uma Enciclopédia no sentido textual da palavra (nem todos os temas são tratados). Se poderia dizer que é um livro de consulta, indispensável para quem trabalha em praticamente qualquer ramo de sistemas dinâmicos. Além disso, em alguns casos o especialista encontrará novas provas ou referências históricas muito interessantes.

Feita a descrição do livro e tendo analisado seus grandes aspectos positivos, me referirei agora a algumas carências e desajustes que me parece sadio e útil observar.

Para meu gosto e conhecimento particulares, creio que os fluxos geodésicos, a teoria matemática dos bilhares, as tangências homoclínicas e de forma mais notória, todos os problemas de estabilidade (incluindo

---

<sup>5</sup>Como escreveu David Ruelle, na resenha já citada:

“Dado que a área em seu conjunto foi desenvolvida através de uma série de contribuições não planejadas, o resultado parece um tanto desordenado. Do ponto de vista estrutural dos Bourbakistas, mostra uma desagradável falta de unidade. Tem-se a reconhecida elegância da matemática, em que temas aparentemente não relacionados resultam conectados em algum nível profundo, e certamente cada novo desenvolvimento revela alguma harmonia escondida. Entretanto, a arquitetura global da teoria dos sistemas dinâmicos pode ser descrita como não terminada e sem muita planificação.”

a estabilidade estrutural), ocupam demasiado pouco espaço, ainda que o que apareça seja correto e representativo.

Em alguns aspectos os autores dão uma visão tão própria que parecem cair em excesso. Dessa forma se modificam, sem aviso, terminologias que parecem estar estandardizadas (os difeomorfismos Axioma A não aparecem com este nome), se dá um desenvolvimento um tanto quanto excessivo a alguns temas em relação a outros que poderiam ter sido incluídos (por exemplo, o crescimento de órbitas proveniente da topologia, Capítulo 8) ou, o que é ainda mais importante, algumas vezes esta visão particular pode ocultar para um principiante os elementos heurísticos principais que estão por trás do desenvolvimento das idéias e das demonstrações. Nesta categoria inclui-se os temas que os autores consideram atualmente “periféricos” apesar de sua importância no desenvolvimento da disciplina (teoria de Denjoy, fluxos em superfícies) ou as construções das variedades invariantes e das medidas invariantes para sistemas hiperbólicos (ainda assim, pode-se concordar com a visão de Floris Takens, no Bulletin of the AMS, de que “o tratamento dos sistemas dinâmicos hiperbólicos, incluindo suas propriedades ergódicas... é realmente excelente.”).

Porém, não se pode cair na simplificação de dizer que o livro fica a meio caminho: muito complexo para ser um texto e insuficientemente amplo e extenso para ser uma obra completa de referência. Suas virtudes são notoriamente superiores a todos os defeitos que se possa encontrar.

Não podemos deixar de destacar a elegância e brevidade de quase todas as demonstrações. Um sadio espírito não retórico permeia o livro e é uma de suas grandes virtudes. Destaco, por sua concisão e clareza, as demonstrações do Teorema de Poincaré-Bendixson (uma página da Seção 14.1) e o Teorema Ergódico de Birkhoff-Khinchin (4.1).

É importante observar que este texto, ainda que muito vasto e amplo, não considera aplicações. Não há referências para simulações de sistemas dinâmicos nem aos procedimentos numéricos, que jogaram um importante papel no desenvolvimento da teoria; tampouco aparecem - e se poderia argumentar que não tem porque aparecer - elementos da teoria do controle ou bifurcações aplicadas, nem muitas das motivações provenientes da física ou de outras ciências.

A afirmação dos autores de que o livro pode ser usado por estudantes avançados de graduação ou de pós-graduação em ciências ou engenharia

com fortes pré-requisitos matemáticos, parece um pouco exagerada <sup>6</sup>, visto o nível de dificuldade de quase toda a exposição. Seria mais apropriado dizer que os potenciais usos e usuários são menos específicos e de diferentes categorias. Partes do livro podem ser organizadas para dar cursos em diferentes níveis de pós-graduação ou para estudo individual por estudantes particularmente brilhantes. Os pesquisadores de quase qualquer área da matemática encontrarão uma fonte de máxima qualidade e profundidade sobre uma grande quantidade de tópicos, assim como enunciados precisos dos resultados e idéias principais de quase todas as suas demonstrações. Toda biblioteca que se queira chamar “de matemática” deve possuir um exemplar.

IMERL, Facultad de Ingeniería  
Universidad de la República  
C.C. Nro. 30  
Montevideo, Uruguay

---

<sup>6</sup>Foi anunciado o lançamento de um “Primeiro curso” de dinâmica pelos mesmos autores e editores, que quiçá cubra, com a imensa desenvoltura e capacidade do livro que agora comentamos -ainda que dirigido a outro público- algumas das carências observadas. Nota: o resenhista se refere ao recém-publicado *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*, Cambridge University Press, 2003.