

A conjectura de Seifert: sobre a existência de órbitas periódicas de campos de vetores em S^3

PEDRO A. S. SALOMÃO

1 Introdução

Em 1950, Herbert Seifert [Se] levantou a seguinte questão: será que todo campo de vetores contínuo em S^3 possui uma órbita periódica? Uma resposta afirmativa a essa questão passou então a ser conhecida como a conjectura de Seifert¹.

Em 1974, Paul A. Schweitzer [Sch] encontrou um contra-exemplo para esta conjectura, construindo um campo de vetores de classe C^1 em S^3 sem órbitas periódicas. Para isso, ele utilizou um campo de vetores no toro T^2 construído por A. Denjoy [De] e uma técnica de modificação controlada de campos de vetores devida a W. Wilson [Wi], conhecida como *plug*.

Pretendemos, neste artigo, esboçar as principais idéias da construção de P. Schweitzer e comentar outros resultados relacionados com a conjectura de Seifert.

2 A esfera S^3

A esfera unitária de dimensão 3 é definida por $S^3 \stackrel{def}{=} \{(x_1, p_1, x_2, p_2) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + p_1^2 + x_2^2 + p_2^2 = 1\}$. Estamos usando a notação Hamiltoniana

¹Como estamos supondo apenas continuidade do campo de vetores, devemos assumir unicidade de soluções.

para as coordenadas em \mathbb{R}^4 já que alguns exemplos dessa natureza serão apresentados a seguir.

Para entendermos melhor a topologia de S^3 consideramos a projeção esterográfica $\pi_N : S^3 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por

$$\pi_N(x_1, p_1, x_2, p_2) = \left(\frac{x_1}{1-p_2}, \frac{p_1}{1-p_2}, \frac{x_2}{1-p_2} \right)$$

onde $N = (0, 0, 0, 1)$ é o pólo norte de S^3 . É fácil verificar que π_N é um homeomorfismo (considerando as topologias naturais correspondentes) e, portanto, S^3 é homeomorfo a $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. Muitas propriedades de S^3 são, portanto, melhor visualizadas em \mathbb{R}^3 .

3 Campos de vetores em S^3

Consideraremos campos de vetores em S^3 sem singularidades, ou seja, aplicações $X : S^3 \rightarrow TS^3$ tais que $X(p) = (p, v)$, onde $0 \neq v \in T_p S^3$. Como vimos no parágrafo anterior, podemos imaginar X como sendo um campo de vetores em \mathbb{R}^3 sem esquecermos o ponto no ∞ .

Obs. Seja S uma variedade difeomorfa a S^3 e seja $\varphi : S^3 \rightarrow S$ um difeomorfismo. Se X é um campo de vetores sem singularidades em S então φ induz um campo de vetores com propriedades equivalentes em S^3 dado pelo seu *pull-back* $\varphi^* X$. Portanto, falar em campos de vetores em S^3 é equivalente a falar em campos de vetores em qualquer variedade difeomorfa a S^3 .

3.1 A fibração de Hopf

Um dos campos mais conhecidos em S^3 é o campo X_{H_0} , associado à função Hamiltoniana $H_0 : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, onde $H_0(x_1, p_1, x_2, p_2) = x_1^2 + p_1^2 + x_2^2 + p_2^2$ cujas equações diferenciais são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial p_1} = 2p_1 \\ \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H_0}{\partial x_1} = -2x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{\partial H_0}{\partial p_2} = 2p_2 \\ \dot{p}_2 &= -\frac{\partial H_0}{\partial x_2} = -2x_2 \end{aligned}$$

Esse sistema é desacoplado, ou seja, o comportamento nos planos $\pi_1 \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, p_1)$ e $\pi_2 \stackrel{\text{def}}{=} (x_2, p_2)$ é independente um do outro. Observe que o sistema preserva a função Hamiltoniana, ou seja, as esferas centradas na origem são invariantes, em particular, $S^3 = H_0^{-1}(1)$.

Todas as soluções do campo X_{H_0} em S^3 são periódicas e se projetam nos planos π_1 e π_2 em circunferências de raios $r_1 \geq 0$ e $r_2 \geq 0$, respectivamente, tais que $r_1^2 + r_2^2 = 1$. As órbitas periódicas são conhecidas como as fibras da Fibrção de Hopf ou os Círculos de Clifford.

3.2 O elipsóide irracional

Consideremos a função Hamiltoniana dada por $H_1(x_1, p_1, x_2, p_2) = x_1^2 + p_1^2 + r^2(x_2^2 + p_2^2)$ onde $r^2 > 0$ é um irracional. Note que o conjunto invariante $S \stackrel{\text{def}}{=} H_1^{-1}(1)$ não é mais a esfera unitária, mas um elipsóide, que é difeomorfo a S^3 .

Como antes, as soluções do campo Hamiltoniano X_{H_1} são projetadas nos planos π_1 e π_2 em circunferências de raios $r_1 \geq 0$ e $r_2 \geq 0$, respectivamente. É fácil ver que agora existem apenas 2 órbitas periódicas P_1 e P_2 em S correspondentes a $r_1 = 0$ e $r_2 = 0$, respectivamente. Quando $r_1 r_2 \neq 0$ a órbita não é periódica devido à irracionalidade de r^2 . Conforme mencionamos antes, o campo X_{H_1} induz em S^3 um campo de vetores com propriedades equivalentes.

4 A conjectura de Seifert

H. Seifert [Se] estudou perturbações contínuas do campo X_{H_0} provando que se a perturbação for suficientemente pequena² então o campo perturbado possui pelo menos uma órbita periódica. Num artigo auto-contido e de caráter totalmente topológico, o elemento crucial de sua demonstração é que qualquer homeomorfismo de S^2 que preserva orientação possui pelo menos um ponto fixo. Possivelmente isso o levou a

²Novamente devemos assumir unicidade das soluções

questionar se qualquer campo de vetores contínuo de S^3 possuía uma órbita periódica, questão esta que passou a ser chamada de conjectura de Seifert.

5 O *plug* de W. Wilson

Em 1966, W. Wilson [Wi] deu um passo importante para solucionar a conjectura de Seifert. Desenvolveu o que ficou conhecido como *plug*. Para evitarmos definições abstratas de *plug*, vamos direto para um exemplo.

Sejam X um campo de vetores de classe C^1 e sem singularidades em S^3 . Seja $V \stackrel{def}{=} B^2 \times [-1, 1]$ e considere em V o campo de vetores vertical $Z = (0, 1)$ que se anula na primeira componente de V e é constante na segunda componente³. Dado $p \in S^3$, sabemos que existe uma vizinhança tubular $U \subset S^3$ em volta de p e um difeomorfismo $\varphi : U \rightarrow V$ que conjuga o fluxo em U com o fluxo em V (possivelmente após uma reparametrização de tempo).

Vamos construir um novo campo de vetores W em V de tal forma que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

- (i) W coincide com Z numa vizinhança de ∂V ;
- (ii) Qualquer órbita de W que entra em V pelo ponto $(x, -1) \in B^2 \times \{-1\}$ e sai de V pelo ponto $(y, 1) \in B^2 \times \{1\}$ é tal que $x = y$. Isso é conhecido como a propriedade da imagem espelhada (posteriormente apresentaremos uma maneira de construir W de forma a satisfazê-la sempre);
- (iii) existe uma órbita que entra em V por $B^2 \times \{-1\}$ e não sai de V .

Esse campo de vetores W é um exemplo de *plug*. Pela propriedade (i) de W obtemos um novo campo X_W em S^3 através de φ^*W , o *pull-back* de W pela φ . Claramente, os campos X e X_W coincidem em $S^3 \setminus U$.

Pela propriedade (ii) de W , concluímos que se uma órbita entra e sai de U por X_W , então ela só é modificada em U , já que o ponto de saída de U por X_W é o mesmo que para o campo X . Além disso, por (iii), existe uma órbita que é aprisionada em U , ou seja, entra em U e não sai mais de U .

³ $B^2 \stackrel{def}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Um *plug* pode conter órbitas que ficam em V para frente ou para trás no tempo. Por exemplo, um *plug* pode conter órbitas periódicas. Chamamos um *plug* de aperiódico se ele não contiver órbitas periódicas em seu interior.

O objetivo principal de um *plug* é, portanto, modificar um campo de vetores na vizinhança de um ponto de forma controlada.

Obs: O *plug* também poderia ser construído em $N \times [-1, 1]$ onde N é uma superfície diferente de B^2 . Por exemplo, N poderia ser o anel $A \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ ou então um toro T^2 com um disco topológico subtraído, como veremos na próxima seção.

Veja na Figura 1 um exemplo de *plug* bi-dimensional.

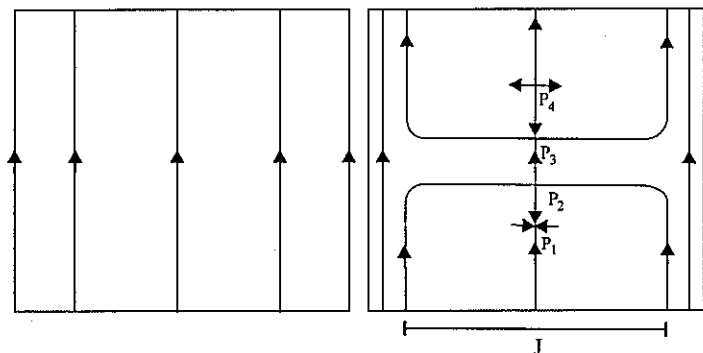


Figura 1: Um *plug* em $K = [0, 1] \times [0, 1]$. À esquerda temos o campo de vetores constante e vertical. À direita temos o *plug*: há 4 pontos de equilíbrio em K sendo p_1 atrator, p_2 e p_3 selas e p_4 uma fonte. Os pontos que entram pelo intervalo $J \times \{0\}$ são aprisionados e não saem mais de K . Da mesma forma, as órbitas para trás pelos pontos de $J \times \{1\}$ ficam aprisionadas em K . Esse *plug* satisfaz a propriedade da imagem espelhada e, portanto, qualquer ponto que entra por $(x, 0) \in [0, 1] \setminus J \times \{0\}$ deve sair de K por $(x, 1)$.

6 O contra-exemplo de P. Schweitzer

Em 1974, P. Schweitzer [Sch] conseguiu construir um *plug* aperiódico de classe C^1 e assim, respondeu negativamente a conjectura de Seifert. Dividiremos o esboço de sua construção em 3 partes.

1ª Parte: Em [De], A. Denjoy construiu um campo de vetores X_0 no

toro T^2 com as seguintes propriedades⁴: (i) X_0 é de classe C^1 , (ii) X_0 não possui pontos de equilíbrio nem órbitas periódicas e (iii) existe um conjunto minimal excepcional C em T^2 , isto é, um compacto invariante propriamente contido em T^2 .

Seja $N \stackrel{def}{=} T^2 \setminus D^2$ onde $D^2 \subset T^2$ é um disco topológico aberto cujo fecho não intersecta C . A superfície N pode ser mergulhada em \mathbb{R}^3 por um difeomorfismo $\psi : N \rightarrow N_1$. Além disso, é possível mergulhar $M \stackrel{def}{=} N \times [-1, 1]$ em \mathbb{R}^3 por um difeomorfismo $\Psi : M \rightarrow M_1$ de modo que $\Psi(x, t) = \psi(x) + (0, 0, t)$ para todo $(x, t) \in N \times [-1, 1]$. Veja o mergulho de M na Figura 2.

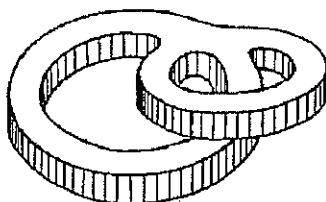


Figura 2: Um mergulho de $N \times [-1, 1]$. Os níveis $N \times \{c\}$, $c \in [-1, 1]$ são homeomorfos a N , ou seja, a um toro menos um disco. Essa figura foi retirada de [Sch].

2ª Parte: Consideremos agora dois campos de vetores definidos em M : (i) $Z \stackrel{def}{=} (0, 1)$ é um campo vertical constante, cuja coordenada na direção de N é igual a zero e (ii) $X \stackrel{def}{=} (X_0, 0)$ que tem coordenada vertical zero e coincide com o campo X_0 em cada nível de M .

Seja $\chi : N \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ uma função C^∞ com as seguintes propriedades: (i) χ tem suporte compacto contido no interior de $N \times [0, 1]$ e (ii) $\chi^{-1}(1) = C \times \{1/2\}$. Considere o campo de vetores X_1 em $N \times [0, 1]$ definido por $X_1 = (1 - \chi)Z + \chi X_0$.

Seja $T : M \rightarrow M$ a operação de reflexão definida por $T(x, t) = (x, -t)$. Podemos estender X_1 de forma C^1 em M definindo $X_1(x, t) = -DT(x, -t)X_1(x, -t)$ para todo $(x, t) \in N \times [-1, 0)$.

⁴O campo X_0 é construído a partir da suspensão de um difeomorfismo de S^1 com propriedades análogas. Esse difeomorfismo não pode ser construído C^r com $r \geq 2$. Essa obstrução impede que o contra-exemplo de Schweitzer seja de classe maior que 1.

Vamos mostrar agora que X_1 define um *plug* aperiódico em M . É imediato que X_1 coincide com o campo de vetores vertical $(0, 1)$ numa vizinhança de ∂M . Além disso, pela construção de X_1 em $t < 0$, concluímos que a propriedade da imagem espelhada é satisfeita. Mais ainda, a coordenada vertical do campo é sempre ≥ 0 valendo a igualdade apenas em $C \times \{-1/2, 1/2\}$. Decorre daí que não existem órbitas periódicas em M e que toda órbita que entra em M por $(x, -1)$, $x \in C$, é aprisionada por M , ou seja, não sai mais de M . Isso decorre do fato de que na direção de N o campo é paralelo a X_0 e na direção vertical é crescente, valendo 0 apenas em $C \times \{-1/2, 1/2\}$. Assim, a órbita para frente de $(x, -1)$, $x \in C$, deve permanecer em $N \times [-1, -1/2]$ para todo $t > 0$.

3ª Parte: Finalmente mostraremos como esse *plug* aperiódico pode ser usado para construir um campo de vetores em S^3 sem órbitas periódicas. Considere o campo de vetores X_{H_1} apresentado na Seção 3.2. Como vimos, esse campo possui apenas 2 órbitas periódicas P_1 e P_2 .

Seja $p_1 \in P_1$. Considere um difeomorfismo $\varphi : U_1 \rightarrow V \stackrel{def}{=} B^2 \times [-1, 1]$ que conjuga o fluxo de X_{H_1} na vizinhança tubular $U_1 \subset H_1^{-1}(1)$ em volta de p_1 , com o fluxo gerado por um campo vertical constante em V . Modificaremos o campo vertical em V inserindo cópia menor do *plug* aperiódico construído conforme explicado na 2ª Parte. Seja $(x_1, -1) \in B^2 \times \{-1\}$ o ponto que corresponde à entrada de P_1 em U_1 . Posicionamos o *plug* de forma que a projeção de C em B^2 contenha x_1 , obtendo um novo campo X_1 em V . Dessa forma, o campo X_1 aprisiona a órbita que passa por $(x_1, -1)$. Considerando o *pull-back* de X_1 por φ , temos que o novo campo de vetores em S^3 quebra a órbita periódica P_1 . O mesmo procedimento pode ser feito para quebrar P_2 . Como os *plugs* inseridos são aperiódicos e satisfazem a propriedade da imagem espelhada, o novo campo em S^3 não possui novas órbitas periódicas, enquanto que as órbitas periódicas anteriores P_1 e P_2 foram destruídas. Isso termina a construção do contra-exemplo da conjectura de Seifert.

Obs: O *plug* aperiódico construído na 2ª Parte é conhecido como o "colar clérico".

7 Outros contra-exemplos da conjectura de Seifert

Em [Ha1] e [Ha2], Jenny Harrison contruiu um contra-exemplo C^2 ganhando diferenciabilidade do campo de vetores através do uso de frac-

tais. Apenas em 1994 Krystyna Kuperberg [K1] construiu um *plug* aperiódico C^∞ e, portanto, apresentou um contra-exemplo de classe C^∞ à conjectura de Seifert. O *plug* de Krystyna foi construído da mesma forma que o *plug* de Wilson (que não é aperiódico) e, através de um truque conhecido como auto-inserção, as órbitas periódicas do *plug* são destruídas. Logo depois, junto com seu filho Greg Kuperberg [K2], ela generalizou esse contra-exemplo além de ter obtido analiticidade do campo de vetores. Greg Kuperberg [K3] conseguiu também, a partir da construção de Schweitzer, um contra-exemplo de classe C^1 que preserva volume.

8 A conjectura de Seifert Hamiltoniana

Apesar dos contra-exemplos, muitos resultados afirmativos à conjectura de Seifert, além de [Se], foram demonstrados, como, por exemplo Novikov ([No], 1967), para campos de vetores transversais a uma folheação C^∞ de co-dimensão 1 em S^3 e Alan Weinstein ([We3], 1973), para níveis de energia próximos de um mínimo local não-degenerado de um sistema hamiltoniano em \mathbb{R}^4 , obtendo 2 órbitas periódicas.

Uma nova vertente a essa questão ficou conhecida como a conjectura de Seifert hamiltoniana: existe pelo menos uma órbita periódica em um nível de energia regular e compacto em \mathbb{R}^4 ? E no caso de \mathbb{R}^{2n} , $n > 2$?

Um importante resultado que garante a existência em “quase todo nível de energia” foi demonstrado por H. Hofer e E. Zehnder em [HZ].

M. Herman [He], V. Ginzburg [Gi] e Ginzburg-Gurel [GG] mostraram contra-exemplos à conjectura de Seifert hamiltoniana em níveis de energia difeomorfos a $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$, $n \geq 2$.

9 A conjectura de Weinstein

A. Weinstein (1978, [We1]) e P. Rabinowitz (1979, [Ra]) demonstraram afirmativamente a conjectura de Seifert hamiltoniana no caso em que os níveis de energia são, respectivamente, convexos e *star-shaped*⁵. Em [We2], A. Weinstein percebeu que ambos os casos se tratavam de níveis de energia conhecidos como “de contato” e conjecturou que toda hipersuperfície de contato em uma variedade simplética, não necessari-

⁵Existe um ponto $p \in \mathbb{R}^4$ pelo qual toda semi-reta por p intersecta o nível de energia em exatamente 1 ponto.

amente difeomorfa a S^3 , tem órbita periódica. Essa conjectura ficou conhecida como a conjectura de Weinstein.

C. Viterbo [Vi] provou a conjectura de Weinstein em \mathbb{R}^{2n} com a forma simplética canônica. H. Hofer [Ho] demonstrou afirmativamente a conjectura em casos mais gerais usando curvas pseudo-holomorfas. No caso de S^3 a conjectura também foi demonstrada mas ainda é um problema em aberto se há sempre exatamente 2 ou infinitas órbitas periódicas. Uma resposta parcial para esse problema pode ser encontrada em [HWZ1] e [HWZ2].

Referências

- [De] Denjoy, A. (1932) *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl., **11**, 333-375.
- [Gi] Ginzburg, V. L. (1997) *A smooth counterexample to the Hamiltonian Seifert conjecture in \mathbb{R}^6* , IMRN, **13**, 641-650.
- [GG] Ginzburg, V. L. and Gurel, B. Z. (2003) *A C^2 -smooth counterexample to the Hamiltonian Seifert conjecture in \mathbb{R}^4* , The Annals of Mathematics, (2) **158**, 953-976.
- [Ha1] Harrison, J. (1985) *Continued Fractals and Seifert Conjecture*, Bull. Amer. Math. Society, **13**, n.2, 147-153.
- [Ha2] Harrison, J. (1988) *C^2 Counterexamples to the Seifert Conjecture*, Topology, **27**, n.3, 249-278.
- [He] Herman, M. R. (1999) *Examples of compact hypersurfaces in \mathbb{R}^{2p} , $2p = 6$, with no periodic orbits, in Hamiltonian systems with three or more degrees of freedom*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C, Math. Phys. Sci., vol. 533, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [Ho] Hofer, H. (1993) *Pseudoholomorphic curves and Symplectisations with application to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math., **114**, 515-563.
- [HZ] Hofer, H. and Zehnder, E. (1987) *Periodic solution on hypersurfaces and a result by C. Viterbo*, Invent. Math. **90**, 1-9.
- [HWZ1] Hofer, H., Wysocki, K. and Zehnder, E. (1998) *The dynamics on a strictly convex energy surface in \mathbb{R}^4* , The Annals of Mathematics (2) **148**, n. 1, 197-289.
- [HWZ2] Hofer, H., Wysocki, K. and Zehnder, E. (2003) *Finite energy foliations of tight three-spheres and Hamiltonian dynamics*, The Annals of Mathematics **157**, 125-257.

- [K1] Kuperberg, K. (1994) *A smooth counterexample to the Seifert Conjecture*, The Annals of Mathematics, (3) **140**, 723-732.
- [K2] Kuperberg, G. and Kuperberg, K. (1996) *Generalized Counterexamples to the Seifert Conjecture*, The Annals of Mathematics, (2) **144**, 547-576.
- [K3] Kuperberg, G. (1996) *A volume-preserving counterexample to the Seifert conjecture*, Comment. Math. Helv., **71**, 70-97.
- [No] Novikov, S. (1967), *Topology of foliations*, Trans. Moscow Math. Soc. **14**, 268-304.
- [Ra] Rabinowitz, P. (1979) *Periodic solutions of Hamiltonian systems on a prescribed energy surface*, J. Diff. Eq., **33**, 336-352.
- [Sch] Schweitzer, P. A. (1974) *Counterexamples to the Seifert Conjecture and Opening Closed Leaves of Foliations*, The Annals of Mathematics, (2) **100**, 386-400.
- [Se] Seifert, H. (1950) *Closed Integral Curves in 3-Space and Isotopic Two-dimensional Deformations*, Proc. Amer. Math. Society, **1**, n. 3, 287-302.
- [Vi] Viterbo, C. (1987) *A proof of Weinstein conjecture in \mathbb{R}^{2n}* , Ann. Inst. H.Poincaré Anal. Non Linéaire, **4**, 337-356.
- [We1] Weinstein, A. (1978) *Periodic Orbit for Convex Hamiltonian Systems*, The Annals of Mathematics, **108**, n.3, 507-518.
- [We2] Weinstein, A. (1979) *On the Hypotheses of Rabinowitz's Periodic Orbit Theorems*, J. Diff. Eq, **33**, 353-358.
- [We3] Weinstein, A. (1973) *Normal modes for non-linear Hamiltonian systems*, Inven. Math., **20**, 377-410.
- [Wi] Wilson, F. W. (1966) *On the minimal sets of Non-Singular Vector Fields*, The Annals of Mathematics, **84**, n. 3; 529-536.

Pedro A. S. Salomão
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Rua do Matão 1010, Cidade Universitária,
05508-090, São Paulo, SP, Brazil
E-mail: psalomao@ime.usp.br